الإحصاء

الصف الثالث الثانوي



كتاب الطالب

تأليف

أ./ كمال يونس كبشة
أ.د/ أحمد كامل الخولي

مراجعة وتعديل

أ.د/ شعبان إبراهيم أبو يوسف
د/ محمد محى الدين عبد السلام
أ/ عثمان مصطفى عثمان
أ/ شريف عاطف البرهامى
أ/ أيهاب فتحى زكى
أ/ محمد على قاسم
أ/ جورج يوحنا ميخائيل
د/ محمد عبد العاطى حجاج

إشراف علمى (مستشار الرياضيات)

أ/ منال عزقول

إشراف تربوى (رئيس الادارة المركزية لتطوير المناهج)

د/ أكرم حسن

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

SAKKARA PUBLISHING

الطبعــة الأولى ٢٠١٦/٢٠١٧

رقم الإيـــداع ٨٧٠١ / ٢٠١٦

الرقــم الدولى 978 - 977 - 706 - 029 - 5

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

طبعة ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

المحتويات

الوحدة الأولى: الارتباط والانحدار

الوحدة الثانية: مقاييس متقدمة في الاحصاء

الوحدة الثالثة: الاحتمال

المحتويات

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression



الوحدة

١



مقدمة الوحدة

الإحصاء (Statistics) هو أحد فروع الرياضيات المهمة ذات التطبيقات المتعددة حيث تهتم بجمع وتمثيل البيانات واختزالها فى صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس ملامحها الأساسية وتحليلها؛ بغرض اتخاذ القرارات المناسبة لما لها من أهمية تطبيقية واسعة فى شتى مجالات العلوم الفيزيائية والإنسانية والاقتصادية والاجتماعية وغيرها.

وتهتم هذه الوحدة بتحليل البيانات ذات المتغيرين وبدراسة درجة واتجاه العلاقة بين المتغيرين وشكل هذه العلاقة، فتهتم فى البداية بدراسة الارتباط (correlation) الذى يكشف عن درجة وقوة العلاقة بين متغيرين وقد تتخذ هذه العلاقة الشكل طرديًا أو عكسيًا، ومن الجدير بالذكر أن الارتباط يدرس العلاقة واتجاهها بين متغير وآخر، إلا انه يجب أن ندرك بأن هذه العلاقة لا تدل على السببية أو العلية، فهى لا تدل على وجود أثر لمتغير على آخر كما سيتضح من خلال الدرس الأول فى هذه الوحدة، كما تتناول هذه الوحدة أيضا دراسة الانحدار الخطى البسيط (Linear regression) الذى يهتم بتقدير شكل هذه العلاقة والذى يمكن من خلاله التنبؤ بقيمة المتغير التابع إذا علمنا قيمة المتغير المستقل، وتزداد دقته كلما كانت العينة مختارة بشكل عشوائى، وسوف نتناول فى هذه الوحدة بعض التقنيات الحديثة من آلات حاسبة علمية وبرامج إحصائية للحاسوب (مثل برنامج SPSS) فى إجراء الحسابات والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بالارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

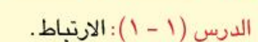
- يتعرف معنى الارتباط بين متغيرين.
- يحسب معامل الارتباط بين متغيرين بطرق مختلفة (طريقة بيرسون - طريقة سبيرمان) ويفسر معناها رياضيًا.
- يفهم معنى خط الانحدار، ويقدر أهميته فى دراسة العلاقة بين متغيرين.
- يمثل العلاقة بين متغيرين فى مستوى كارتيزى، ويحكم من خلالها على وجود وقوة العلاقة.
- يتعرف معنى معامل الانحدار الخطى ويفسر ما يمكن أن يستدل عليه بمعرفة قيمة هذا المعامل.
- يُوجِد معادلة خط انحدار أى من المتغيرين على الآخر بطريقة المربعات الصغرى.
- يستخدم الآلة الحاسبة والحاسوب فى إجراء العمليات الحسابية والقيام بالرسوم البيانية الخاصة بكل من الارتباط والانحدار الخطى بين ظاهرتين.
- يستخدم معادلة خط انحدار معطاة فى التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بمعلومية القيمة المناظرة للمتغير الآخر.
- يطبق الارتباط والانحدار الخطى فى مواقف بحثية.
- يقدر إسهامات استخدام الارتباط والانحدار الخطى فى حل مشكلات حياتية ومجتمعية.

المصطلحات الأساسية



- الارتباط *Correlation*
- الانحدار *Regression*
- الارتباط الخطي *Linear Correlation*
- معامل الارتباط *Correlation Coefficient*
- ارتباط طردى *Direct Correlation*
- ارتباط عكسى *Inverse Correlation*
- شكل الانتشار *Scatter diagram*
- معامل ارتباط بيرسون *Pearson Correlation Coefficient*
- معامل ارتباط سبيرمان *Spearman Correlation Coefficient*
- خط الانحدار *Regression Line*
- المربعات الصغرى *Least Square*

دروس الوحدة



الدرس (١ - ١): الارتباط.

الدرس (١ - ٢): الانحدار.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية - برنامج الإكسيل - برنامج spss

مخطط تنظيمى للوحدة

الارتباط والانحدار

- الارتباط
  - شكل الانتشار
  - أنواع الارتباط
    - منعدم
    - طردى
    - عكسى
  - معامل الارتباط
    - طريقة بيرسون
    - طريقة سبيرمان
- الانحدار
  - شكل الانتشار
  - خط الانحدار
    - طريقة المربعات الصغرى
    - معادلة خط الانحدار

الوحدة الأولى

١ - ١

الارتباط

Correlation

سوف تتعلم

- تعريف الارتباط
- شكل الانتشار
- الارتباط الطردى والارتباط العكسى
- معامل الارتباط الخطى
- معامل الارتباط الخطى لبيرسون
- معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

المصطلحات الأساسية

- الارتباط Correlation
- الارتباط الخطي Linear Correlation
- معامل الارتباط Correlation Coefficient
- ارتباط طردى Direct Correlation
- ارتباط عكسى Inverse Correlation
- شكل الانتشار Scatter diagram
- معامل ارتباط بيرسون Pearson Correlation Coefficient
- معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) spearman`s coefficient correltion

مقدمة:

سبق أن درست فى الإحصاء كيفية وصف مجموعة من البيانات التى تمثل ظاهرة وذلك باستخدام بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت ومعامل الاختلاف، وفى هذا الدرس سوف تدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما، بمعنى إذا تغير أحد المتغيرين فى اتجاه معين (بالزيادة أو النقصان) فإن المتغير الآخر يميل إلى التغير فى اتجاه معين أيضًا بالزيادة أو النقصان، ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا طرديًّا، وإذا تغير أحد المتغيرين نحو الزيادة اتجه الآخر نحو النقصان، والعكس صحيح ويُسمى الارتباط فى هذه الحالة ارتباطًا عكسيًّا.

الارتباط :



تأمل الأمثلة الآتية ودون ملاحظاتك عليها:

١- العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته.

٢- العلاقة بين الإصابة بضغط الدم والعمر.

٣- زيادة سعر الوحدة من سلعة ما ومدى الطلب على شرائها.

٤- انخفاض درجة الحرارة ومدى الطلب على استهلاك الوقود.

٥- العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر وارتفاع درجة الحرارة.

نلاحظ من الأمثلة السابقة أن:

- المتغيرين المرتبطين يتغيران بنفس الاتجاه، أى إن زيادة أو نقصان أحدهما يؤدى إلى زيادة أو نقصان الآخر كما فى الأمثلة ١، ٢، ٣ ويقال إن الارتباط بينهما موجب (طردى).

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية.

نلاحظ فى المثالين (٤)، (٥) أن المتغيرين المرتبطين يتغيران باتجاه مُعاكِس، فالزيادة أو النقصان فى أحدهما تؤدى إلى نقصان أو زيادة فى الآخر، عندئذ يقال إن الارتباط بينهما سالب (عكسى).

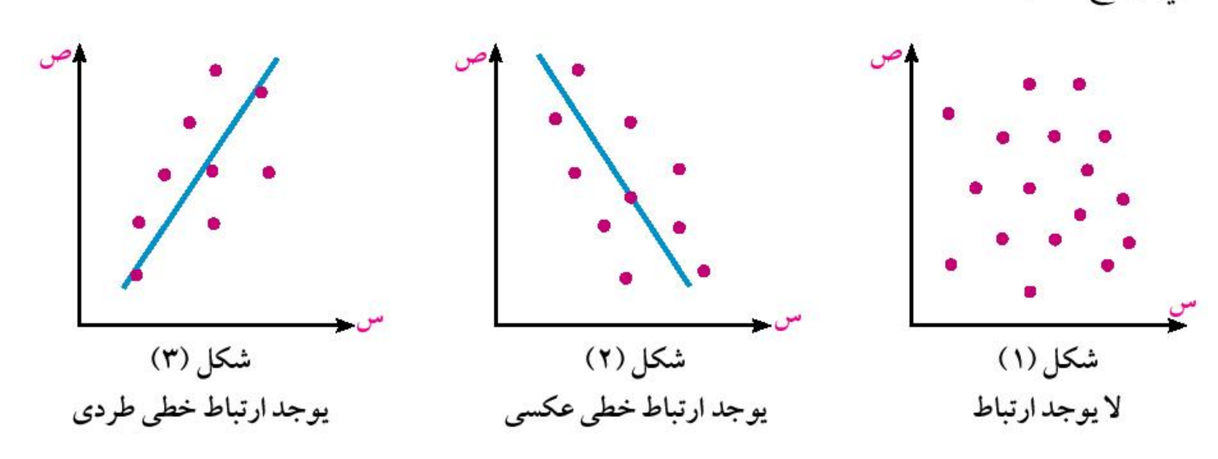
تعريف الارتباط هو طريقة إحصائية يمكن من خلالها تحديد درجة ونوع العلاقة بين متغيرين.

والعلاقة بين متغيرين تتراوح من الدرجة القوية إلى الدرجة الضعيفة، فعندما تكون العلاقة قوية فإن ذلك يعنى أن معرفة قيمة أحد المتغيرين يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر، وعندما تكون العلاقة ضعيفة فإن ذلك يعنى أن معرفة أحد المتغيرين لا يساعد فى التنبؤ بقيمة المتغير الآخر.
أن إحدى الطرق المهمة التى تساعدنا على التعرف على درجة العلاقة ونوعها بين متغيرين هى تحديد شكل الانتشار.

شكل الانتشار: *Scatter diagram*

تعريف شكل الانتشار هو تمثيل بيانى لعدد من الأزواج المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين.

إذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز (س) والظاهرة الثانية بالرمز (ص) فإن الأشكال التالية توضح العلاقة بين س، ص. والتي توضح شكل الانتشار



شكل (١) لا يوجد ارتباط — شكل (٢) يوجد ارتباط خطى عكسى — شكل (٣) يوجد ارتباط خطى طردى

الارتباط الخطي: *Linear Correlation*

تعريف يعرف الارتباط الخطي البسيط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين متغيرين.

نشاط

ارسم شكل الانتشار لكل من البيانات الآتية ثم اذكر نوع العلاقة التى تعبر عن تلك البيانات.

(١)

س	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ص	١٣	١٤	١٧	١٨	٢١	٢٣

(٢)

س	٣	٤	٧	٨	١١	١٥
ص	٢٣	٢٢	٢٠	١٨	١٧	١٦

③

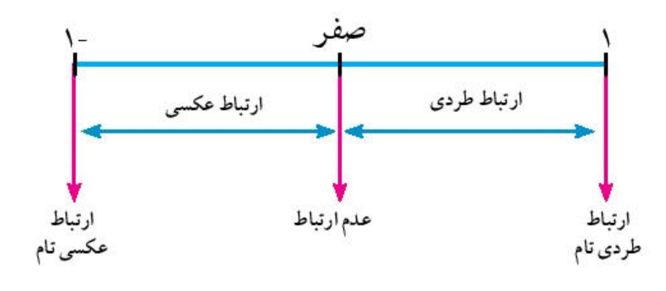
س	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٦
ص	١٤	٧	٢٠	٦	١٢	١٠

معامل الارتباط
Correlation Coefficient

معامل الارتباط يرمز له بالرمز (ر) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث $-1 < ر < 1$، ويقال إن الارتباط **طردى تام** إذا كان معامل الارتباط ر = ١، ويقال إن **الارتباط عكسى** تام إذا كان معامل الارتباط ر = - ١، وينعدم الارتباط عندما ر = ٠

ونلاحظ أن:

كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد ١ كان الارتباط الطردى بين المتغيرين قويًا، وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردى ضعيفًا، وينطبق نفس القول على الارتباط العكسى. والشكل المجاور يوضح ذلك.



تعبير شفهى: اختيار من متعدد:

معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو:

أ) −٠,٨ ب) −٠,٥ ج) ٠,٤ د) ٠,٧

معامل ارتباط بيرسون
Pearson Correlation coefficient

نفرض لدينا مجموعة مكونة من (ن) فردًا وحصلنا من هؤلاء الأفراد على بيانات عن قيم متغيرين س، ص فتكون البيانات أن التى لدينا على الصورة:

قيمة المتغير الأول س: $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$

قيمة المتغير الثانى ص: $ص_1$، $ص_2$، $ص_3$، ....، $ص_ن$

إذا رمزنا لمعامل الارتباط بالرمز (ر)، فان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص أو معامل الارتباط الخطى يمكن إيجاده من العلاقة:

$$ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}\ \sqrt{ن \sum ص^2 - (\sum ص)^2}}$$

حيث: "$\sum$" رمز التجميع وتقرأ مجموع.

ن ترمز الى عدد المفردات ،

$\sum س = س_1 + س_2 + س_3 + ... + س_ن$ ،

$\sum ص = ص_1 + ص_2 + ص_3 + ... + ص_ن$ ،

$\sum س ص = س_1 ص_1 + س_2 ص_2 + س_3 ص_3 ...... + س_ن ص_ن$

$\sum س^2 = س_1^2 + س_2^2 + س_3^2 + ... + س_ن^2$ ،

$\sum ص^2 = ص_1^2 + ص_2^2 + ص_3^2 ...... + ص_ن^2$

مثال

① الجدول التالى يبين الدرجات التى حصل عليها عشرة طلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا:

التاريخ س	٧٥	٨٠	٩٣	٦٥	٨٧	٧١	٩٨	٦٩	٨٤	٧٨
الجغرافيا ص	٨٢	٧٨	٨٦	٧٢	٩١	٨٠	٩٥	٧٣	٨٩	٧٤

والمطلوب حساب معامل ارتباط بيرسون بين س، ص وتحديد نوع الارتباط.

الحل

نُكوِّن الجدول التالى:

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
٧٥	٨٢	٥٦٢٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
٨٠	٧٨	٦٤٠٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٩٣	٨٦	٨٦٤٩	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٦٥	٧٢	٤٢٢٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٧	٩١	٧٥٦٩	٨٢٨١	٧٩١٧
٧١	٨٠	٥٠٤١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩٨	٩٥	٩٦٠٤	٩٠٢٥	٩٣١٠
٦٩	٧٣	٤٧٦١	٥٣٢٩	٥٠٣٧
٨٤	٨٩	٧٠٥٦	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٨	٧٤	٦٠٨٤	٥٤٧٦	٥٧٧٢
$\sum$ س =٨٠٠	$\sum$ ص =٨٢٠	$\sum$ $س^2$ =٦٥٠١٤	$\sum$ $ص^2$ =٦٧٨٢٠	$\sum$ س ص =٦٦٢٦٠

$$\because \; ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^{2} - (\sum س)^{2}}\;\sqrt{ن \sum ص^{2} - (\sum ص)^{2}}}$$

$$\therefore \; ر = \frac{١٠ \times ٦٦٢٦٠ - (٨٠٠ \times ٨٢٠)}{\sqrt{١٠ \times ٦٥٠١٤ - (٨٠٠)^{2}}\;\sqrt{١٠ \times ٦٧٨٢٠ - (٨٢٠)^{2}}} = ٠,٨٦٠٦$$

$$= \frac{٦٠٠٦}{\sqrt{١٠١٤٠}\;\sqrt{٥٨٠٠}} \simeq ٠,٨٦٠٦$$

والارتباط طردى .

حاول أن تحل

① من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

احسب معامل ارتباط بيرسون " الخطى" بين س، ص وحدد نوعه.

استخدام الآلة الحاسبة العلمية:

تدعم الكثير من الآلات الحاسبة العلمية الموجودة بالأسواق إيجاد نواتج الأعمدة الموجودة فى الجدول السابق وحساب معامل الارتباط كالآتى:

- **تهيئة الآلة الحاسبة لنظام الإحصاء:**

وذلك بالضغط على: MODE ثم 3

Statistical and regression calculations	MODE 3 (STAT)

نختار من القائمة المنسدلة:

Paired-variable (X, Y), linear regression ($y = A + Bx$)	2 (A+BX)

- **إدخال البيانات:**

نملأ الجدول المبين بالشكل لجميع قيم (X ،Y) وذلك بكتابة العدد الموجود فى جدول = وبعد الانتهاء من كتابته نضغط حتى الانتهاء من كتابة جميع قيم (X ،Y)



- **استدعاء النواتج:**

نضغط على المفاتيح: (STAT) 1 SHIFT فتعطى منها: 3:sum

ونختار من هذه القائمة كلًّا من:

$1:\Sigma x^2$ ، $2:\Sigma x$ ، $3:\Sigma y^2$ ، $4:\Sigma y$ ، $5:\Sigma xy$

وذلك بالضغط على المفاتيح من ١ إلى ٥ كل على حدة.

لإيجاد معامل الارتباط (ر) نضغط المفاتيح التالية:

(STAT) ومن القائمة المنسدلة نضغط: 5 : Reg

ومن القائمة المنسدلة نضغط: 3 : r فيعطى ناتج معامل الارتباط المطلوب بين المتغيرين x ، y



استخدم الآلة الحاسبة للتحقق من صحة حل المثال السابق.

برنامج SPSS الأحصائى

برنامج (spss) هو اختصار (Statistical package for social sciences) وهو ما يعني الحزم الإحصائية للعلوم الاجتماعية ، وبرنامج spss هو عبارة عن مجموعة من الحزم أو بيانات حسابية شاملة للقيام بتحليل هذه البيانات ، ويتم استخدام هذا البرنامج في الأبحاث العلمية التي تحتوي على بيانات رقمية .

يستطيع البرنامج القيام بقراءة كافة البيانات من كافة أنواع الملفات وتحليلها واستخراج النتائج والتقرير الإحصائية، والبرنامج يتيح للمستخدم تحرير البيانات وتعديلها في شكل متغيرات وبيانات جديدة باستخدام معادلة ، وكذلك حفظ البيانات في ملفات وتسميتها أو تعديل أسماء ملفات البيانات ، أو استرجاع البيانات والملفات والمشاهدات ،

وذلك من خلال التحكم في قائمة من الأوامر والخيارات المتاحة في البرنامج ، لتشمل كافة مراحل تحليل البيانات والعملية الإحصائية من **خلال أربع خطوات هي** :

١ - ترميز البيانات .
٢ - وضع البيانات في البرنامج .
٣ - انتقاء الشكل المناسب واختبار البيانات وتحليلها .
٤ - تحديد البيانات المتغيرة المراد تحليلها وتحقيق عملية الإحصاء .

تشغيل برنامج spss :

يتم فتح وتشغيل برنامج spss عن طريق الضغط على نافذة ابدأ (Start) الموجودة في القائمة الرئيسية ، ثم نقم بالذهاب الى قائمة البرامج (Program) ، والبحث عن برنامج spss ونضغط علي مرتين ليفتح البرنامج

مكونات البرنامج ووظائفها:

لائحة الأوامر (Sntiocnd Funammoc):

وهو عبارة عن شريط الأوامر الخاصة بعمل البرنامج ، حيث يمكن للمستخدم اختيار الامر الذي يريده عن طريق الضغط على ايقونة كل أمر احصائي وبالتالي تعرض النتيجة في لائحة التقارير ، ولائحة الأوامر تشمل عدد تسع أوامر رئيسية والتي عند الضغط عليها يتفرع منها عدد من الأوامر فرعية ، بخلاف ايقونة مساعدة (Help).

بيئة عرض البيانات (Data View) :

هي عبارة عن بيئة يقوم المستخدم بالتحكم في إضافة البيانات التابعة لكل متغير أو إلغائها ، حيث يقوم المستخدم بإيداع أي متغير مستقل في عمود (Column) على شاشة البيانات، حيث يستطيع المستخدم التحويل لعرض ومشاهدة المتغيرات عن طريق الضغط والتنقل بين الامرين (DataView) و (VariableView)، الموجودين اسفل يسار شاشة المتغيرات.

شاشة المتغيرات :

شاشة تعريف البيانات المتغيرة ، والتي تحتوي على أعمدة متوازية ، حيث يحتوي كلم عمود (Column) على البيانات الخاصة بكل متغير ، ولعرض تعريف كل متغير ، يقوم لمستخدم بالضغط بزر الماوس مرتين (Double Click) ، أو يمكنه الضغط على الأمر (Variable View) الموجود أسفل يسار شاشة التعريفات ، وعندها يتغير شكل الشاشة ويظهر شريط عناوين :

- **الاسم** Name - **النوع** Type
- **الحجم** Width - **الترميز** Values

وعند الضغط عليه يظهر الترميز ، ومن ثم نضغط على زر (Add) لعرض قيمة الرمز والوضع .

خطوات يمكن للمستخدم التحكم فيها :

(١) إمكانية استرجاع البيانات السابقة : يمكن التحكم في استرجاع البيانات والملفات عن طريق الضغط على زر ملف (File) ثم الضغط على الأمر فتح (Open) ثم يقوم المستخدم باختيار الملف الذي يحتوي على البيانات المراد استرجاعها والتي تشمل التقارير الإحصائية التي تم عملها مسبقا ثم الضغط على حفظ (Save) .

(٢) حفظ المتغيرات الجديد في ملف : يمكن للمستخدم حفظ المتغيرات في ملف ، عن طرق الضغط على الامر (Save) أو الامر (Save as) ليتم الحفظ و إعطاء الملف الجديد الاسم الذي يختاره .

(٣) إضافة التعديلات وإدارة المتغيرات : يقوم المستخدم الذهاب الى نافذة محرر البيانات (Data Editor) واضافة البيانات التي يريدها ، **حيث يستطيع :**

- تعديل قيمة البيانات .
- تعريف المتغيرات ، من تحديد نوعية البيانات التي تم إضافتها، والمؤشرات الاقتصادية وكافة المتغيرات.

(٤) يستطيع المستخدم إضافة متغير جديد ،وعرض ومشاهدة ترتيب المشاهدات التي حدثت عن طريق استخدام الأمر الرئيسي (Data) ثم اتباع كل تغير يريد من إضافة متغير أو اضافة مشاهدة جديدة أو تعديل ترتيب البيانات .

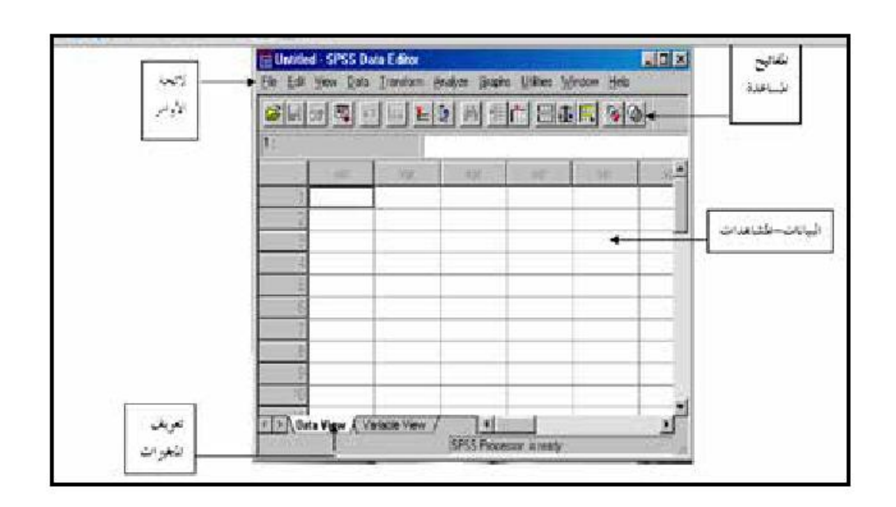
(٥) تكوين متغير جديد كليا عن طريق استخدام معادلة ، حيث يذهب الى القائمة الرئيسية (Transform)، ثم الانتقال إلى المربع الجانبي (Compute) وبعد ذلك يقوم بتحديد اسم المتغير الجديد في قائمة (Targer Variable)

(٦) إمكانية إلغاء أي متغير أو إلغاء مشاهدة .

(٧) ترتيب المشاهدات ، حيث يقوم البرنامج بإنشاء متغير جديد يحتوي على رقم تسلسلي ليتم ترتيب المشاهدات تصاعديا أو تنازليا .

(٨) إجراء عملية إحصاء وتحديد الوصف الإحصائي وتدرجه وتكرار البيانات .

(٩) إمكانية عمل تمثيل للمتغيرات من خلال إنشاء رسم بياني ، لعرض تحليل المتغيرات وتفسير ما تم في المتغيرات الجديدة.





نشاط

استخدم الشبكة العنكبوتية فى تحميل برنامج (SPSS) من الموقع: /http://www-01.ibm.com/software/analytics/spss ثم تحقق من صحة حل المثال السابق.

مثال

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كـان:

$\sum$ س = ٦٨ $\sum$ ص = ٣٦ $\sum$ س ص = ٣٤٨

$\sum$ س^{٢} = ٦٢٠ $\sum$ ص^{٢} = ٢٠٤   ن = ٨

الحل

$$\therefore ر = \frac{ن \sum س ص - (\sum س \times \sum ص)}{\sqrt{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}} \sqrt{ن \sum ص^{٢} - (\sum ص)^{٢}}}$$

$$\therefore ر = \frac{٨ \times ٣٤٨ - (٦٨ \times ٣٦)}{\sqrt{٨ \times ٦٢٠ - (٦٨)^{٢}} \sqrt{٨ \times ٢٠٤ - (٣٦)^{٢}}} = \frac{٣٣٦}{\sqrt{٣٣٦} \sqrt{٣٣٦}} = ١$$

قيمة معامل الارتباط (+ ١) تعنى أن هذه العلاقة طردية تامة بين المتغيرين س، ص.

حاول أن تحل

(٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه. إذا كان:

$\sum$ س = ٩٢ $\sum$ ص = ٣٦ $\sum$ س ص = ٣٧٢

$\sum$ س^{٢} = ١١٠٠ $\sum$ ص^{٢} = ٢٠٤   ن = ٨

معامل ارتباط سبيرمان (الرتب) *Spearman's Rank Correltion Coefficient*



قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقديرات مادتين دراستين لسبع طلاب ودوَّن النتائج فى الجدول التالى :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول

فإذا أراد هذا الإحصائى أن يقف على مدى العلاقة بين هاتين المادتين و إيجاد معامل للارتباط بينهما فهل يمكنك مساعدته فى ذلك؟

لا نستطيع استخدام معامل ارتباط بيرسون فى بند **فكر و ناقش** لأنه يعتمد على البيانات الكمية (العددية) فقط، ولكن فى حالة البيانات الوصفية (كما فى البند السابق) فإنه يمكن استخدام معامل ارتباط آخر يعرف بمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، وهو يعطى مقياسًا للارتباط فى كل من البيانات الكمية والوصفية التى لها صفة الترتيب كما فى البند السابق، و يعتمد هذا المعامل على ترتيب قيم المتغيرات مع الأخذ فى الاعتبار الترتيب التصاعدى أو التنازلى ثم نستخدم العلاقة الآتية:

$$ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$$

حيث ف هى الفرق بين رتب المتغيرين س، ص، ن هى عدد قيم كل من المتغيرين.

لاحظ أن

- معامل ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواءً كانت البيانات كمية أو وصفية، بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط.
- يتميز معامل سبيرمان لارتباط الرتب بسهولته حتى لو كانت البيانات غير مرتبة.
- يُؤخذ على معامل سبيرمان إهماله لفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالى فهو أقل دقة.

مثال

(٣) أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان فى بند فكر وناقش السابق وحدد نوعه .

الحل

فى هذا المثال نرتب الظاهرتين ترتيبًا تصاعديًّا منتظمًا وذلك بأن تعطى كل طالب رتبة تقدير لمادة، وكذلك المادة الثانية للطالب نفسه كما فى الجدول الآتى :

المادة الأولى	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جدًا
الترتيب مع التكرار	١	٤	٢	٥	٣	٧	٦
الترتيب النهائى	٢	٤	٢	٥	٢	٧	٦

نلاحظ أن الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ١، ٢، ٣

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢ + ٣}{٣}$ = ٢ (وهو الوسط الحسابى للأعداد ١، ٢، ٣) وبالمثل:

المادة الثانية	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جدًا	مقبول
الترتيب مع التكرار	١	٣	٦	٤	٢	٧	٥
الترتيب النهائى	١,٥	٤	٦	٤	١,٥	٧	٤

نلاحظ أن المستوى (ضعيف) تكرر مرتين وشغل الأماكن ١، ٢

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{١ + ٢}{٢}$ = ١,٥ (وهو الوسط الحسابى للعددين ١، ٢)

كذلك المستوى(مقبول) تكرر ثلاث مرات وشغل الأماكن ٣، ٤، ٥

لذلك تكون رتبة كل منها = $\frac{٣ + ٤ + ٥}{٣}$ = ٤ نلخص الحل فى الجدول الآتى :

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	صفر	صفر
ضعيف	جيد	٢	٦	٤	١٦
جيد	مقبول	٥	٤	١	١
ضعيف	ضعيف	٢	١,٥	٠,٥	٠,٢٥
ممتاز	جيد جدًا	٧	٧	صفر	صفر
جيد جدًا	مقبول	٦	٤	٢	٤
					٢١,٥

$\because$ ر = ١ - $\frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$ $\therefore$ ر = ١ - $\frac{٦ \times ٢١,٥}{٧(٤٩ - ١)}$

= ١ - $\frac{١٢٩}{٣٣٦}$ ≃ ٠,٦١٦١ وهو ارتباط طردى



حاول أن تحل

③ فى دراسة عن مدى العلاقة بين مستوى الطلاب فى مادتى الإحصاء والرياضيات وجد أن تقديرات ستة طلاب فى المادتين كالتالى:

تقدير الإحصاء (س)	مقبول	جيد جدًّا	ممتاز	جيد جدًّا	مقبول	مقبول
تقدير الرياضيات (ص)	جيد	جيد	جيد جدًّا	ممتاز	جيد	ضعيف

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين التقديرات وحدد نوعه .

مثال

④ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠



الحل

نكون الجدول الآتى:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف^٢
٤	٧	٦	٢	٤	١٦
٧	٦	٤	٤	٠	٠
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
٥	٤	٥	٦	١	١
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	١	١	٠	٠
					٢١,٥

$\because$ ر = ١ - $\frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$ $\therefore$ = ١- $\frac{٦ \times ٢١,٥}{٦(٣٦ \quad ١)}$ ≃ ٠,٣٨٥٧ والارتباط طردى

تفكير ناقد: هل يختلف $\sum$ ف^٢ إذا رتبنا الظاهرتين س، ص ترتيبًا تصاعديًّا؟ فسر إجابتك

حاول أن تحل

④ احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه وذلك من بيانات الجدول التالى:

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠

تمارين ١ - ١

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

(١) معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو :

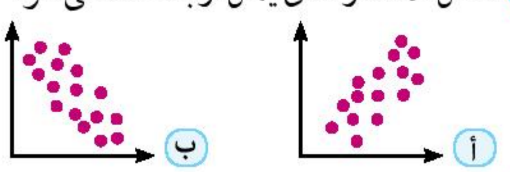
(أ) - ٠,٩٤ (ب) صفر (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٨٥

(٢) أقوى معامل ارتباط عكسى فيما يلى هو :

(أ) - ٠,٢ (ب) - ٠,٥ (جـ) - ٠,٧ (د) - ٠,٨

(٣) شكل الانتشار الذى يمثل ارتباط عكسى هو:

(أ) (ب) (جـ) (د)



(٤) أضعف معامل ارتباط فيما يلى هو:

(أ) - ١,٢ (ب) - ٠,٧ (جـ) ٠,١٢ (د) ٠,٩

(٥) أحد الأعداد التالية يمكن أن يمثل أقوى معامل ارتباط عكسي بين متغيرين:

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٩ (جـ) - ١,١ (د) - ٠,٩٥

(٦) من بيانات الجدول الآتى:

س	١٢	١٠	١٤	١١	١٢	٩
ص	١٨	١٧	٢٣	١٩	٢٠	١٥

أولًا: احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

ثانيًا: احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س، ص

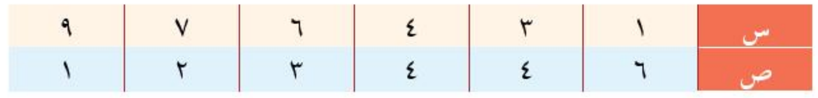
(٧) من بيانات الجدول الآتى:



س	٧	٧	٨	٣	٧	١١
ص	٨	٤	١٢	٢	١٠	١١

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س، ص

(٨) من بيانات الجدول الآتى :



س	١	٣	٤	٦	٧	٩
ص	٦	٤	٤	٣	٢	١

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص مبينًا نوعه.

(٩) من بيانات الجدول الآتى :

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

احسب معامل الارتباط لبيرسون بين قيم س، ص وحدد نوعه .

(١٠) من بيانات الجدول الآتى:

س	٣	١	٦	٤	٣	٨
ص	٧	٤	٥	٨	٦	٧

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص وحدد نوعه.

(١١) من بيانات الجدول الآتى:

س	جيد جدًا	جيد جدًا	جيد	ضعيف	مقبول	جيد جدًا
ص	جيد	مقبول	جيد	ممتاز	جيد جدًا	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص.

(١٢) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه إذا كـان:

مجـ س = ٢٢٠   مجـ ص = ١٤٠   مجـ س ص = ٢٦٥٨

مجـ $س^{٢}$ = ٥٤٨٦   مجـ ص٢ = ٢٢٩٢   ن = ١٠

(١٣) **الربط بالتجارة:** الجدول الآتى يوضح مجموعة مكونة من ٦ كتب طبقًا لسعرها (س) وحجم المبيعات (ص):

السعر (س)	منخفض	منخفض جدًا	متوسط	مرتفع جدًا	مرتفع	مرتفع جدًا
حجم المبيعات (ص)	مرتفع	مرتفع	مرتفع جدًا	منخفض	متوسط	منخفض

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين سعر الكتاب وحجم مبيعاته.

(١٤) **الربط بالدعاية:** أرادت إحدى الشركات دراسة العلاقة بين إنفاقها على الدعاية س (بالألف جنيه) وحجم مبيعاتها ص (بالألف وحدة). فإذا علمت أن بيانات فروع الشركة الثمانية كانت كالآتى:

س	١٩	١٨	٧	١٠	٤	١٣	١٥	٥
ص	١٢	١٠	٧	٩	٦	١٣	١٤	١٢

فأوجد معامل ارتباط الرتب بين حجم الإنفاق على الدعاية وحجم المبيعات مبينا نوع الارتباط .

(١٥) **الربط بالتعليم:** البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب فى مادتى الكيمياء والأحياء.

الكيمياء	٦٠	٨٥	٥٥	٩٠	٦٥	٥٠	٨٠	٧٠	٩٥	٧٥
الأحياء	٥٥	٧٥	٥٠	٩٥	٦٠	٦٥	٨٥	٨٠	٩٠	٧٠

احسب معامل الارتباط الخطى لبيرسون وحدد نوعه .

(١٦) **الربط بالمواليد:** فى دراسة لتحديد العلاقة بين عمر الأم وعدد أطفالها. جاءت البيانات كما يلى :

عُمر الأم	١٨	٢٠	٢٣	٢٧	٢٩	٣٢	٣٣	٣٥
عدد الأطفال	٢	١	١	٢	٣	٤	٣	٥

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه.

الوحدة الأولى

١ - ٢

الانحدار

Regression

سوف تتعلم

- تعريف الانحدار
- أنواع الانحدار
- معادلة خط الانحدار
- طريقة المربعات الصغرى
- أنشطة على إيجاد معادلة خط الانحدار .

المصطلحات الأساسية

- الانحدار Regression
- خط الانحدار Regression Line
- المربعات الصغرى Least Square

تذكر أن

- الدالة هى علاقة بين مجموعتين س، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س عنصر وحيد من عناصر ص.
- تتحدد الدالة متى عُلم كل من: المجال - المجال المقابل - قاعدة الدالة

تمهيد

سبق أن درست الدالة، وتعرفت الشكل البيانى لها، كما تعرفت فى الدرس السابق شكل الانتشار، وعلمت أن الهدف من رسمه هو تحديد طبيعة العلاقة بين المتغيرين س ، ص من خلال البيانات المتعلقة بهما كما علمت أن خصائص الارتباط بين ظاهرتين يمكن أن تأخذ إحدى الصور الآتية :

علاقة خطية Linear Relationship

علاقة خطية عكسية Negative Linear Relationship

علاقة غير خطية Non-Linear Relationship

لا توجد علاقة No Relationship

وفى هذا الدرس سوف ندرس كيفية تحديد معادلة خط الانحدار Equation of Regression Line والهدف من هذه الدراسة هو مساعدة الباحث على معرفة نوع البيانات المعطاة و إجراء تنبؤات صحيحة من خلالها .

تعريف الانحدار هو أسلوب إحصائى يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

وله عدة أنواع :

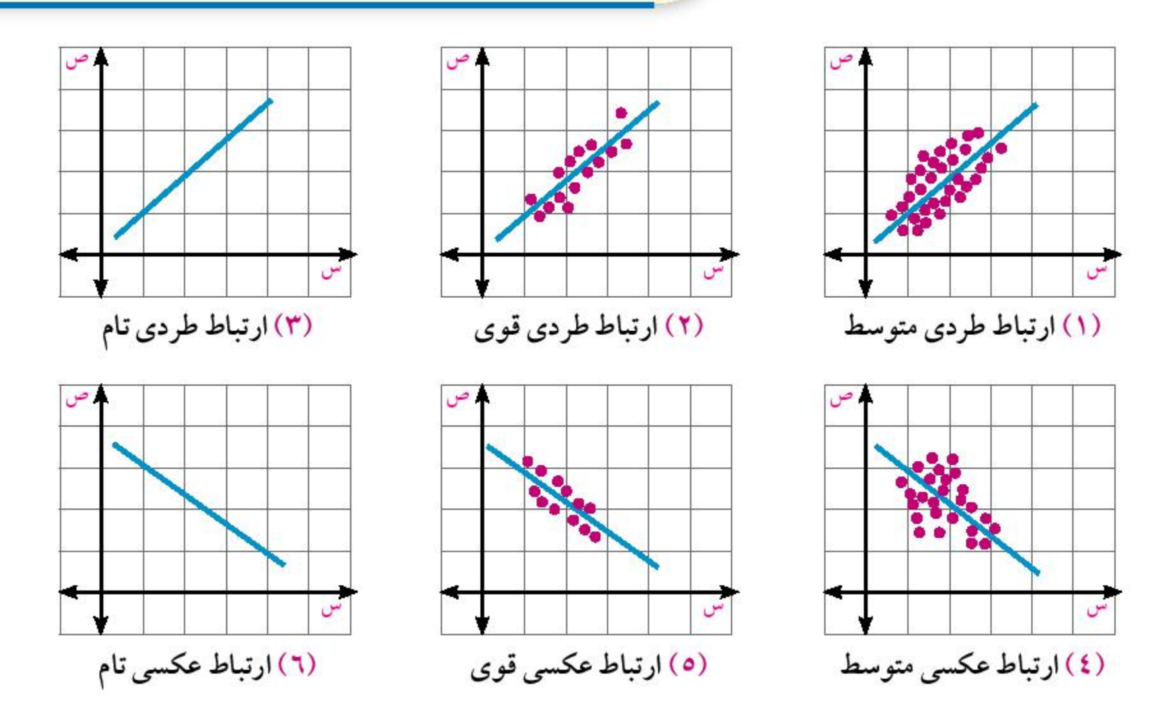
أ **الانحدار الخطى البسيط :** ويعتمد فيه المتغير التابع (ص) على متغير واحد (س) من خلال علاقة خطية .

ب **الانحدار المتعدد :** ويعتمد فيه المتغير التابع (ص) على أكثر من متغير مستقل .

جـ **الانحدار غير الخطى :** إذا كانت العلاقة بين المتغير التابع (ص) والمتغيرات المستقلة غير خطية (من الدرجة الثانية أو الثالثة أو أسية أو لوغاريتمية أو .....)

وسنقتصر فى هذا الدرس على الانحدار الخطى البسيط فقط . والأشكال التالية توضح العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع النقاط على خط الانحدار . وكلما اقتربت النقاط من الانطباق على هذا الخط زادت أو نقصت قيمة (ر) الى أن تصل إلى انطباق جميع النقاط على الخط وفى هذه الحالة تكون قيمة (ر) إما (+ ١) أو (- ١).

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برنامج SPSS للحاسوب. برنامج : Microsoft Exceel.



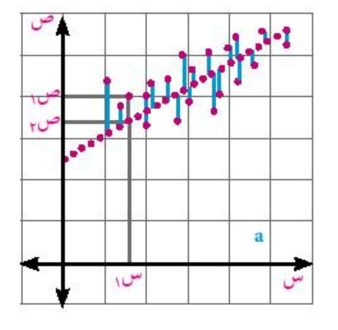
معادلة خط الانحدار *Equation of Regression Line*

سبق أن درسنا فى الهندسة التحليلية معادلة الخط المستقيم الذى ميله م ويقطع جزءًا من محور الصادات مقداره جـ وهى : ص = م س + جـ .

وبالعودة إلى أشكال الانتشار الموضحة سابقًا نجد أنه إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (٢) أو (٥) فإن هذا يشير بصفة مبدئية بأن العلاقة بين المتغيرين خطية؛ لأننا نستطيع أن نتصور وجود خط مستقيم تقع النقط من حوله وقريبة منه وإن كانت لا تقع جميعها عليه، أما إذا بدا شكل الانتشار كما فى أى من الشكلين (١) أو (٤) فإننا نشك فى خطية العلاقة بين المتغيرين. ولذا فإن مهمتنا الأساسية هى استخدام أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$) المشاهدة لإيجاد أفضل خط مستقيم يلائم مجموعة نقط العينة ولتكن معادلته هى:

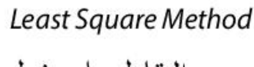
ص = أ + ب س

والطريقة الأكثر شيوعًا لإيجاد أفضل قيم لـ أ ، ب تسمى طريقة المربعات الصغرى.



طريقة المربعات الصغرى: *Least Square Method*

علمنا مما سبق أنه فى حالة الارتباط ليس بالضرورة أن تقع جميع النقاط على خط الانحدار ، لذلك يكون هناك نسبة خطأ للنقاط التى لا تقع على خط الانحدار، وللحصول على أفضل خط الانحدار يجب تقليل الانحرافات لأصغر قيمة ممكنة (خط الانحدار المناسب يمر أو يقترب بأكبر عدد من نقاط الانتشار) فإذا كان (س، ص) هى إحدى النقط الحقيقية للبيانات وكانت (س، $\hat{ص}$) هى النقطة الواقعة على خط الانحدار ($\hat{ص}$ تقرأ ص هات) فإن خط الانحدار المناسب عندما يكون

|$\hat{ص}$ - ص| اقل مايمكن لجميع قيم س أو عندما $\sum$($\hat{ص}$ - ص)^٢ اقل مايمكن

وبفرض معادلة خط الانحدار هى $\hat{ص}$ = أ + ب س

∴ الفرق المطلق = | (أ + ب س) - ص |

والمطلوب تعيين قيمتى أ ، ب بحيث يكون الفرق المطلق اقل ما يمكن وذلك بحل المعادلتين الآتيتين:

$\sum$ ص = ن أ + ب $\sum$ س **(١)** ، $\sum$ س ص = أ $\sum$ س + ب $\sum$ س^{2} **(٢)**

حيث من المعادلة (١) أ = $\frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}}$ وبالتعويض فى (٢)

ب = $\frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - (\sum \text{س})(\sum \text{ص})}{\text{ن} \sum \text{س}^{2} - (\sum \text{س})^{2}}$ تسمى بمعامل انحدار ص على س وهى تعبر عن ميل خط الانحدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات .

وتستخدم معادلة خط انحدار ص على س فى:

١- التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س

٢- تحديد مقدار الخطأ الذى يتحدد من العلاقة :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

ملاحظة: عند استخدام معادلة الانحدار فى التنبؤ (التقدير) يفضل ألا نتجاوز كثيرًا مدى المتغير س المستخدم فى حساب معادلة الانحدار.

تفكير ناقد: قيمة معامل الانحدار تدل على الارتباط. فسر هذه العبارة.

مثال

(١) الجدول التالى يمثل إنتاج أحد المحاصيل الصيفية (ص) من المساحة المنزرعة (س) بالفدان :

المساحة المزروعة (س) بالفدان	٥٠	٢٠٠	١١٠	٨٠	١٢٠	٧٤,٥	٨٨,٩	٥,٧	١١	٣,٢
الإنتاج (ص) بالكيلوجرام	١٤٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٦	٢٤٠,٥	٢٠٠,٦	٣٣,٥	٦٩,٨	١٨,٧

أولًا : أوجد معادلة خط الانحدار.

ثانيًا : تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلوجرام إذا كانت المساحة المزروعة تساوى ١٠٠ فدان.

ثالثًا : أوجد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن المساحة المزروعة ١٢٠ فدانًا.

الحل

الحل باستخدام الآلة الحاسبة العلمية:

١ - إدخال البيانات :

نتبع نفس الطريقة السابق شرحها فى مثال (١) فى الدرس السابق (الارتباط) لإدخال البيانات.

٢ - استدعاء النواتج :

نضغط على المفاتيح التالية :

نستخدم المفاتيح التالية لإيجاد نواتج العمليات الآتية : (STAT) 1 SHIFT

نختار من القائمة المنسدلة : sum : 3 ونضغط على المفتاح 3

تظهر لنا قائمة أخرى جديدة من ١ إلى ٨ (مجاميع النواتج) نختار منها الآتى :

٢ : ΣX = ٧٤٣,٣ ‏ ‏ ‏ ٤ : ΣY = ٢٢٥٩,١

١ : ΣX^2 = ٨٩٠١٧,١٩ ‏ ‏ ‏ ٥ : ΣXY = ٢٥٤٤٨٩,١٨

أولًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$ب = \frac{ن \Sigma س ص - \Sigma س \Sigma ص}{ن \Sigma س^2 - (\Sigma س)^2}$$

$$= \frac{١٠ \times ٢٥٤٤٨٩,١٨ - ٧٤٣,٣ \times ٢٢٥٩,١}{١٠ \times ٨٩٠١٧,١٩ - (٧٤٣,٣)^2} \simeq ٢,٥٦٣٧$$

نحسب قيمة الثابت أ من العلاقة : $أ = \overline{ص} - ب\,\overline{س}$

حيث : $\overline{س} = \frac{\Sigma س}{ن}$ ، $\overline{ص} = \frac{\Sigma ص}{ن}$

$\therefore \overline{س} = \frac{٧٤٣,٣}{١٠} = ٧٤,٣٣$ ، $\overline{ص} = \frac{٢٢٥٩,١}{١٠} = ٢٢٥,٩١$

$\therefore أ = ٢٢٥,٩١ - ٢,٥٦٣٧ \times ٧٤,٣٣ \simeq ٣٥,٣٥$

ملاحظة :

يمكن حساب الثابت أ مباشرة كالآتى:

$\because أ = \frac{\Sigma ص - ب \Sigma س}{ن}$ ‏ ‏ $\therefore أ = \frac{٢٢٥٩,١ - (٢,٥٦٣٧ \times ٧٤٣,٣)}{١٠} \simeq ٣٥,٣٥$

$\therefore$ معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥

ثانيًا : من معادلة خط الانحدار : $\hat{ص}$ = أ + ب س

$\because \hat{ص}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥ ‏ وبالتعويض عن س = ١٠٠

$\therefore \hat{ص}$ = ٢,٥٦٤ × ١٠٠ + ٣٥,٣٥ = ٢٩١,٧٢ كيلوجرام

يمكن التحقق من صحة الناتج باستخدام الآلة الحاسبة كالآتى:

100 SHIFT 1 (STAT) 5 (Reg) 5 : $\hat{y}$ =

ثالثا : لإيجاد مقدار الخطأ فى الإنتاج إذا علمت أن س = ١٢٠ فدانًا

$\because \hat{ص}$ = ٢,٥٦٤ س + ٣٥,٣٥

$\therefore \hat{ص}$ = ٢,٥٦٤ × ١٢٠ + ٣٥,٣٥ ≃ ٣٤٣

$\because$ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التى تحقق معادلة الانحدار |

$\therefore$ مقدار الخطأ = | ٣٥٦ – ٣٤٣ | = ١٣



نشاط



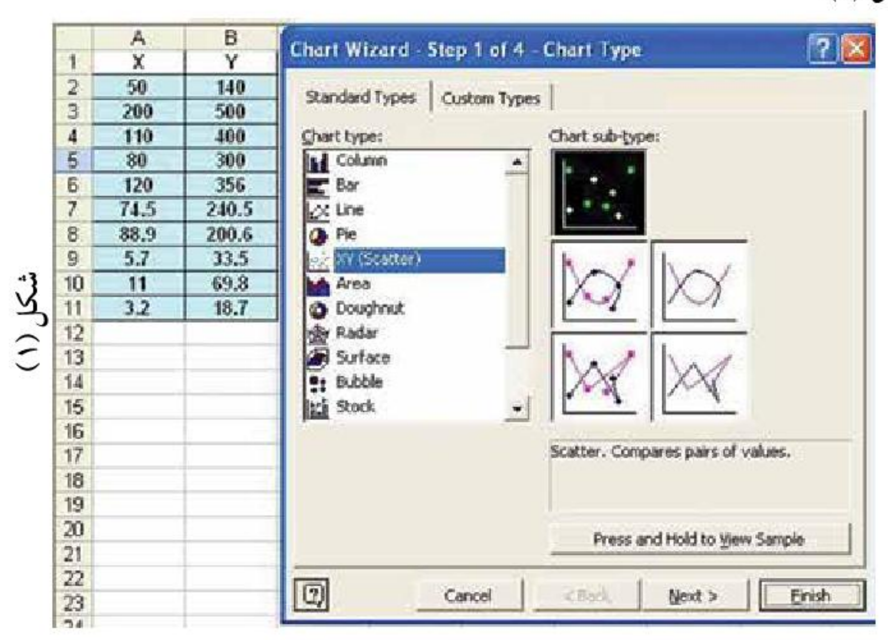
أولًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج (Microsoft Excel)

ثانيًا: تحقق من صحة حل المثال السابق باستخدام برنامج الإحصاء (spss)

أولًا : استخدام برنامج *Microsoft Exceel*

١- افتح برنامج Microsoft Exceel وأدخل البيانات السابقة في خلايا العمودين (B) ، (A) تحت اسم (Y) ، (X) كمتغيرين حقيقيين أو الاسم الحقيقي لتلك البيانات كما هو موضح في شكل (١) .

٢- من شريط الأدوات نضغط على Chart Wizard فنحصل على Chart Type ثم من القائمة XY Scatter نضغط على Finish. كما في شكل (٢).



	A	B
1	X	Y
2	50	140
3	200	500
4	110	400
5	80	300
6	120	356
7	74.5	240.5
8	88.9	200.6
9	5.7	33.5
10	11	69.8
11	3.2	18.7

شكل (١)

شكل (٢)

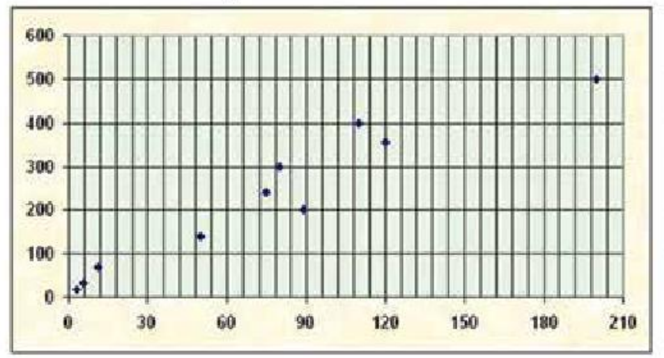
٣- يبين شكل (٣) التمثيل البياني للنقاط المدرجة في الجدول والذي يسمى شكل الانتشار . نختار منها الشكل المظلل باللون الأسود. والذي يظهر هنا بعد إجراء تغير في الخلفية كما مبين بالشكل .

٤- القيم على المحور الأفقي تمثل قيم x للبيانات والمحور الرأسي للقيم y ونحن هنا بصدد إيجاد معادلة خط انحدار y على x والتي تأخذ الصورة الآتية:

$Y = a + bX$.

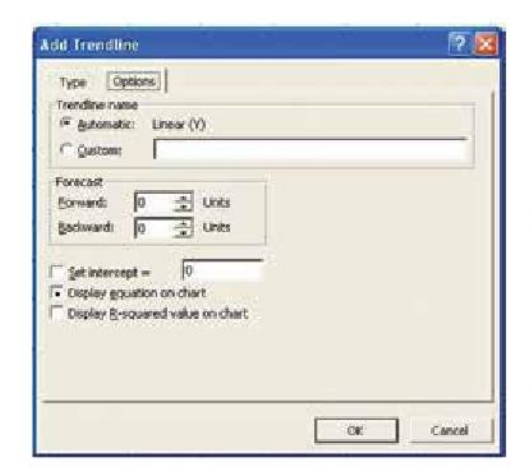
شكل (٣)

٥- بزر الفأرة الأيمن نضغط على إحدى النقاط (في الشكل (٤)) فتظهر القائمة المبينة بالشكل حيث نختار منها Add Trendline و بالنقر عليها بالفأرة نحصل على الشكل التالى الذي يظهر ستة أشكال من الانتشار، قمنا باختيار الأول منها كما مبين بالتظليل باللون الأسود كخيار مقبول؛ لكوننا نريد الخط المستقيم ومن ثم من Options لتحديد المطلوب وذلك بالنقر عليها بالفأرة حيث يظهر صندوق الحوار الآتي :



شكل (٤)

٦ - نعلم على Display equation on chart كما هو مبين بالشكل (٥)

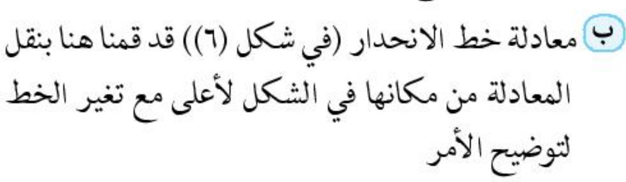


شكل (٥)

٧ - نضغط على OK للحصول على المطلوب وهو:

أ) الشكل المبين فيه خط الانحدار متوسط النقاط الممثلة لأزواج البيانات.

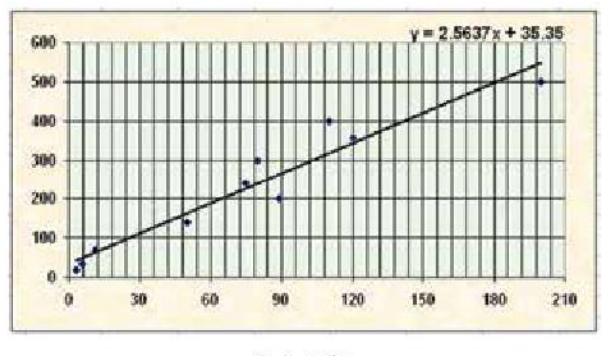
ب) معادلة خط الانحدار (في شكل (٦)) قد قمنا هنا بنقل المعادلة من مكانها في الشكل لأعلى مع تغير الخط لتوضيح الأمر



والشكل التالي هو نتاج العملية والذي يبين لنا المطلوب وخاصة المعادلة الآتية:

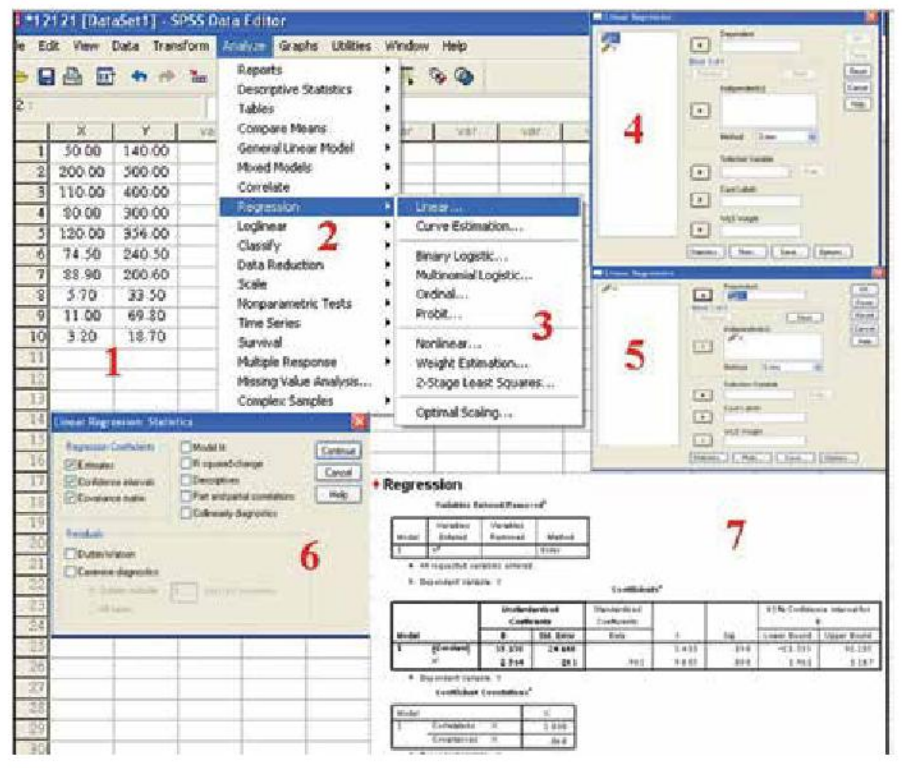
$$35.35 + 2.5637X = Y$$

وهي معادلة خط الانحدار وهى نفس المعادلة التي وجدناها في الحل السابق .



شكل (٦)

استخدام برنامج SPSS



شكل (٧)

مثال

② **الربط بالتعدين** يبين الجدول التالى بيانات عن متوسط سعر برميل البترول ومعدلات النمو الاقتصادي في إحدى الدول خلال ثماني سنوات والمطلوب إيجاد:

سعر برميل البترول (س)	٣٦	٤٠	٣٦,٢	٣١,١	٢٩,٧	١٦,٣	١٨,٧	١٤,٦
معدل النمو الاقتصادى (ص)	٠,٩١	٣,٥	٣,٢	٢,٧	٢,٣	١	٠,٩	١,٦

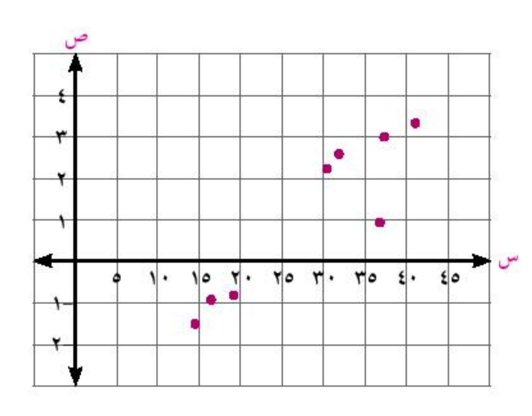
أولًا : ارسم شكل الانتشار وبين منه نوع الارتباط .

ثانيًا : أوجد معادلة خط الانحدار للبيانات المعطاة .

ثالثًا : تنبأ بالنمو الاقتصادى عندما يكون سعر البرميل ١٥ دولارًا، ثم عندما يصبح سعره ٣٥ دولارًا .

الحل

أولًا: الشكل المقابل يمثل شكل الانتشار وهو يبين أن الارتباط طردى .



س	ص	س٢	ص٢	س ص
٣٦	٠,٩١	١٢٩٦	٠,٨٢٨١	٣٢,٧٦
٤٠	٣,٥	١٦٠٠	١٢,٢٥	١٤٠
٣٦,٢	٣,٢	١٣١٠,٤٤	١٠,٢٤	١١٥,٨٤
٣١,١	٢,٧	٩٦٧,٢١	٧,٢٩	٨٣,٩٧
٢٩,٧	٢,٣	٨٨٢,٠٩	٥,٢٩	٦٨,٣١
١٦,٣	١	٢٦٥,٦٩	١	١٦,٣
١٨,٧	٠,٩	٣٤٩,٦٩	٠,٨١	١٦,٨٣
١٤,٦	١,٦	٢١٣,١٦	٢,٥٦	٢٣,٣٦
٢٢٢,٦	٩,١١	٦٨٨٤,٢٨	٤٠,٢٦٨١	٣٨٤,٣٩

من بيانات الجدول:

$\sum$ص = ٩,١١ ‏ ‏ ‏ ‏ $\sum$س = ٢٢٢,٦

$\sum$س ص = ٣٨٤,٣٩ ‏ ‏ ‏ ‏ $\sum$س^2 = ٦٨٨٤,٢٨

ثانيًا : نحسب قيمة الثابت ب من العلاقة :

$$ب = \frac{ن \sum س ص - \sum س \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٨٤,٣٩ - (٢٢٢,٦ \times ٩,١١)}{٨ \times ٦٨٨٤,٢٨ - (٢٢٢,٦)^2} \simeq ٠,١٨٩٦$$

$\because$ $أ = \frac{\sum ص - ب \sum س}{ن}$ ‏ ‏ ‏ ‏ $\therefore$ $أ = \frac{٩,١١ - (٠,١٨٩٦ \times ٢٢٢,٦)}{٨} \simeq -٤,١٣٦٨$

$\because$ معادلة خط الانحدار هي : $\hat{ص} = أ + ب س$

$\therefore$ $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦$ س $- ٤,١٣٦٨$

ثالثًا :

عندما س = ١٥ ‏ ‏ ‏ ‏ تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ١٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq -١,٢٩٢٨$

عندما س = ٣٥ ‏ ‏ ‏ ‏ تكون : $\hat{ص} = ٠,١٨٩٦ \times ٣٥ - ٤,١٣٦٨ \simeq ٢,٤٩٩٢$

حاول أن تحل

(١) في دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) بآلاف الجنيهات كانت النتائج الآتية:

$\sum$س = ١٢٠ ، $\sum$ص = ١٠٠ ، $\sum$س ص = ٥١٦

$\sum$س^2 = ٧٢٠ ، $\sum$ص^2 = ٤١٠ ، ن = ٤٠

(أ) أوجد معامل الارتباط الخطي بين س، ص بطريقة بيرسون وحدد نوعه.

(ب) معادلة خط الانحدار.

(ج) تنبأ بقيمة الاستهلاك (ص) عندما يصل الدخل ١٠٠٠٠ جنيه.

تمـــاريـن (١ - ٢)

أولًا : أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات التالية:

(١) المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث ب معامل الانحدار هى:

(أ) $\hat{ص}$ = أ س + ب (ب) $\hat{ص}$ = أ + ب س

(جـ) $\hat{ص}$ = أ ص + ب (د) $\hat{ص}$ = أ + ب ص .

(٢) إذا كانت معادلة خط الانحدار هى : $\hat{ص}$ = ٢ + ٠,٥ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٦ هى :

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣) إذا وقعت النقطتان (١١,٥ ، ١٠) ، (٦,٥ ، ٥) على خط انحدار ص على س فإن الارتباط بين س ، ص يكون :

(أ) طرديًا (ب) عكسيًّا (جـ) تامًّا (د) منعدمًا

(٤) إذا وقعت النقطتان (٥ ، ١٣) ، (١٤ ، ٤) على خط انحدار ص على س فإن جميع النقاط التالية تقع على نفس الخط ما عدا النقطة :

(أ) (١٥ ، ٥) (ب) (١٠ ، ٨) (جـ) (٦ ، ١٢) (د) (٥ ، ١٣)

(٥) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله سالب فإن معامل الارتباط بين س، ص يساوي:

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) - ٠,٥ (د) -١

(٦) إذا كانت جميع النقاط في شكل الانتشار تقع على خط مستقيم ميله موجب، فان معامل الارتباط بين المتغيرين يساوى :

(أ) - ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

ثانيًا : أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) الجدول الآتى يبين العلاقة بين متغيرين س ، ص :

س	٥	٨	١٠	١٤	١٦	٢٠
ص	٤	٦	٩	١١	١٢	١٥

(أ) أرسم شكل الانتشار (ب) أوجد معادلة خط الانحدار

(جـ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ١٢

(٨) من بيانات الجدول الآتى:

س	٢٠	٣٣	٣٠	٤٠	١٣	١٥	٢٦	٢٥
ص	٧	٨	٩	١١	٤	٥	٨	٩

(أ) تنبأ بقيمة ص عندما س = ٣٥

(ب) أوجد مقدار الخطأ فى ص = إذا كانت س = ٣٠

(٩) فى دراسة إحصائية لإيجاد العلاقة بين متغيرين س ، ص حصلنا على البيانات التالية:
ن = ١٠ ، $\overline{س}$ = ٨ ، $\overline{ص}$ = ١٠ ، مجـ س ص = ٨٧٠ ، مجـ $س^٢$ = ٦٦٥ ، مجـ $ص^٢$ = ١٤٠٠ أوجد:

(أ) معامل الارتباط الخطى.

(ب) معادلة خط الانحدار.

(١٠) إذا كان : مجـ س = ٣٠ ، مجـ ص = ٤٠ ، مجـ س ص = ١٦٢
مجـ $س^٢$ = ٢١٠ ، مجـ $ص^٢$ = ٣٠٤ ، ن = ٦ فأوجد :

(أ) معادلة خط الانحدار.

(ب) معامل الارتباط الخطى بين س ، ص محددا نوعه.

(١١) **الربط بالمبيعات:** فى أحد أماكن بيع السيارات المستعملة كانت المبيعات على النحو التالى:

عمر السيارة (س)	٣	٢	١	١	٥	٦	١	٤
ثمن البيع (ص)	٥٤	٨٠	٧٤	٩٨	٤٥	٤٠	٨٥	٦٠

(أ) معامل الارتباط الخطى لبيرسون

(ب) معادلة خط الانحدار .

(١٢) **الربط بالاقتصاد:** الجدول التالى يمثل الدخل الشهرى (س) والإنفاق (ص) لمجموعة من الأسر بمئات الجنيهات:

الدخل (س)	٣٨	٢٧	٣٩	٤٠	٥٦	٦٦	٤٢	٤٤
الإنفاق (ص)	١٩	٢٥	٢٠	٢٨	٣١	٣٨	٢٧	٢٢

(أ) أوجد معامل ارتباط الرتب بيرسون وحدد نوعه.

(ب) أوجد معادلة خط الانحدار .

(جـ) قَدِّر قيمة الانفاق (ص) إذا كان الدخل (س) ٥٠٠٠ جنيه .

(د) أوجد مقدار الخطأ فى (ص) إذا كانت س = ٤٠ .

(١٣) **الربط بالأسرة:** لدراسة العلاقة بين الدخل "ص" والاستهلاك "س" بمئات الجنيهات شهريًّا فى إحدى المدن، أُخذت عينة مكونة من ٤٠ أسرة فأعطت النواتج الآتية:
مجـ س = ١٠٠ ، مجـ ص = ١٢٠ ، مجـ س ص = ٥١٦ ، مجـ $س^٢$ = ٤١٠ ، مجـ $ص^٢$ = ٧٢٠ .

(أ) أوجد معادلة خط الانحدار.

(ب) تنبأ بدخل الأسرة التى يبلغ استهلاكها ٧٠٠ جنيه شهريًّا.




مقاييس متقدمة في الاحصاء

Statistics Advanced Measurements

مقدمة الوحدة



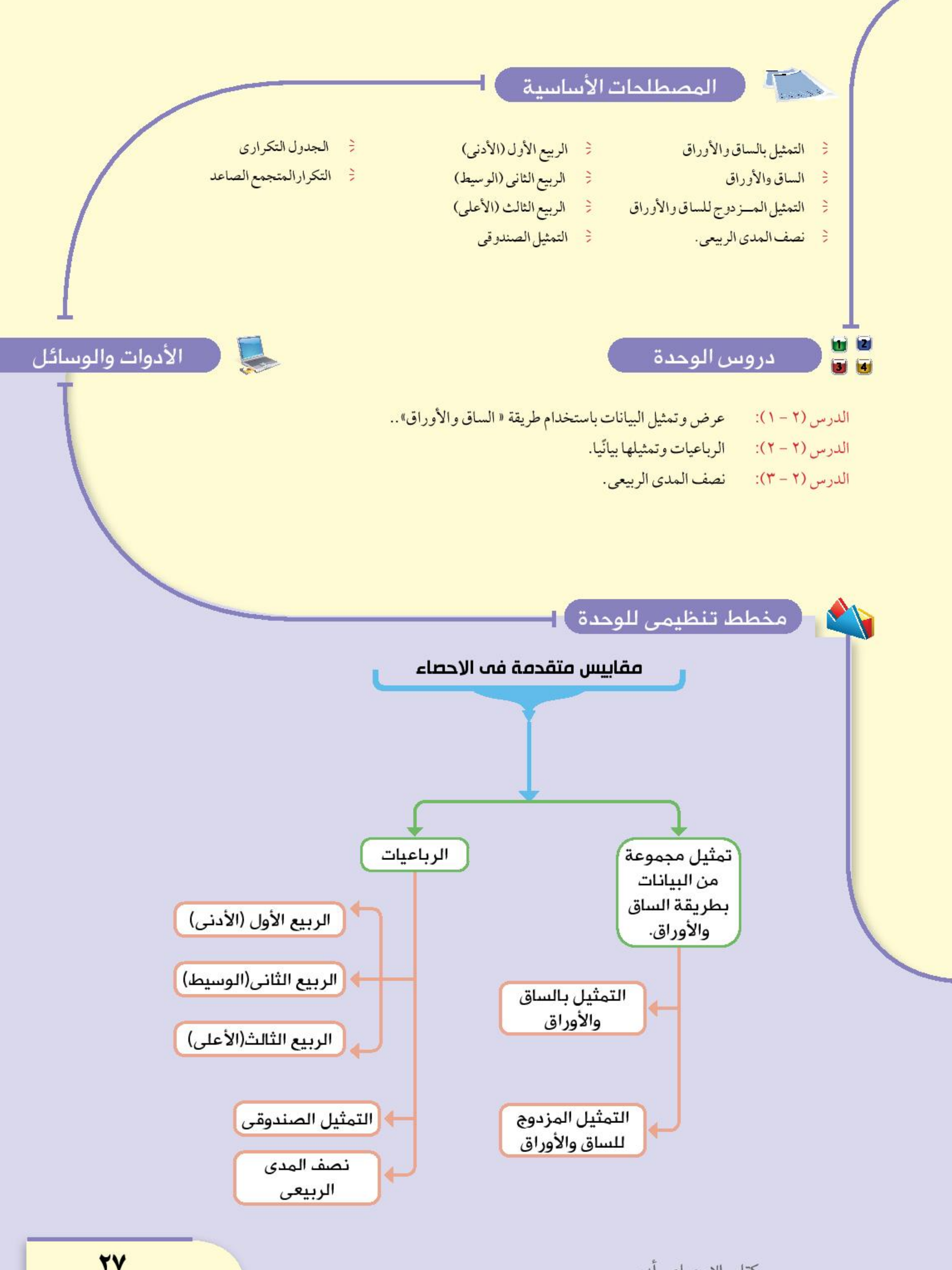
تُعدْ المقاييس الإحصائية جزءًا أساسيًا من العلوم التطبيقية ؛ فهى أدوات تستخدم لقياس الظواهر والمتغيرات المختلفة، وتساعدنا هذه المقاييس في تلخيص وتحليل البيانات، وفهم العلاقات بين المتغيرات، واستنتاج النتائج، والتنبؤ بحدوث بعض الظواهر، وتتنوع المقاييس الاحصائية بحسب النوع وخصائص البيانات التي نعمل عليها، مثل: عرض البيانات باستخدام طريقة الساق والأوراق، وحساب الرباعيات لمجموعة من البيانات وتمثيلها بيانيًا، وحساب نصف المدى الربيعى لمجموعة من البيانات باستخدام الجداول التكرارية وباستخدام طريقة الساق والأوراق؛ كل ذلك من خلال تطبيقات حياتية في مجالات متنوعة مثل: علوم الحاسب والطب والصناعة، والزراعة، .... إلخ ؛ بما يجعل الطالب يُقدِّر أهمية دراسة المقاييس الإحصائية في الحياة.

أهداف الوحدة



يتوقع بعد دراسة الطالب لهذه الوحدة وتنفيذ الأنشطة أن :

- يعرض مجموعة البيانات باستخدام طريقة الساق والأوراق
- يقارن بين مجموعتين من البيانات باستخدام طريقة الساق والأوراق.
- يتعرف مميزات وعيوب طريقة الساق والأوراق لعرض البيانات
- يحسب الرباعيات لمجموعة من البيانات ويمثلها بيانيًا.
- يحسب نصف المدى الربيعى لمجموعة من البيانات باستخدام الجدول التكرارى واستخدام طريقة الساق والأوراق.
- يقدر اهمية الإحصاء فى الحياه اليومية .



المصطلحات الأساسية
التمثيل بالساق والأوراق
الساق والأوراق
التمثيل المــزدوج للساق والأوراق
نصف المدى الربيعى.
الربيع الأول (الأدنى)
الربيع الثانى (الوسيط)
الربيع الثالث (الأعلى)
التمثيل الصندوقى
الجدول التكرارى
التكرار المتجمع الصاعد
دروس الوحدة
الأدوات والوسائل
الدرس (٢ - ١): عرض وتمثيل البيانات باستخدام طريقة « الساق والأوراق»..
الدرس (٢ - ٢): الرباعيات وتمثيلها بيانًيا.
الدرس (٢ - ٣): نصف المدى الربيعى.
مخطط تنظيمى للوحدة
مقاييس متقدمة فى الاحصاء
تمثيل مجموعة من البيانات بطريقة الساق والأوراق.
الرباعيات
التمثيل بالساق والأوراق
التمثيل المزدوج للساق والأوراق
الربيع الأول (الأدنى)
الربيع الثانى(الوسيط)
الربيع الثالث(الأعلى)
التمثيل الصندوقى
نصف المدى الربيعى



الوحدة الثانية

٢ - ١

عرض و تمثيل البيانات بالساق والأوراق

Displaying and Represeinting Data using stem and leaves

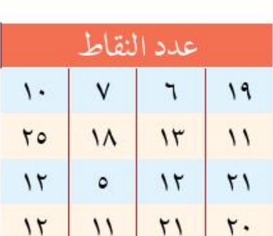
سوف تتعلم

- تمثيل البيانات باستخدام طريقة «الساق والأوراق»
- استخدام طريقة الساق والأوراق فى مقارنة مجموعة من البيانات.

المصطلحات الأساسية

- التمثيل بالساق والأوراق
- الساق Stem
- الأوراق leaves
- التمثيل المـزدوج للساق والأوراق

فكر و ناقش



عدد النقاط			
١٠	٧	٦	١٩
٢٥	١٨	١٣	١١
١٢	٥	١٢	٢١
١٢	١١	٢١	٢٠

البيانات التالية تمثل النقاط التى سجلها ١٦ لاعبًا فى أحد الفرق المدرسية لكرة السلة.



أوجد:

١ أكبرعدد من النقاط التى سجلها أحد اللاعبين.

٢ عدداللاعبين الذين سجلوا أكثرمن١٠نقاط.



تعلم

تمثيل البيانات بالساق والأوراق

عند تمثيل البيانات ٨، ١٣٥، ٧١، ٣٤٥٢ بطريقة الساق والأوراق نرتب البيانات تصاعديًا ، ويكون العدد الموجود فى المنزلة الصغرى (الآحاد) ممثلًا للورقة وباقى العدد ممثلا للساق كما هو بالجدول.

العدد
٨
٧١
١٣٥
٣٤٥٢

الأوراق	الساق
٨	٠
١	٧
٥	١٣
٢	٣٤٥



مثال

(١) من بيانات فكر وناقش مثل هذة البيانات بطريقة الساق و الأوراق.

الحل

الخطوة الأولى: اوجد أكبر وأصغر قيمة من البيانات ثم حدد رقم العشرات لكل منهما

- أصغر قيمة هى ٥ ، رقم العشرات هو صفر
- أكبر قيمة هى ٢٥، رقم العشرات هو ٢

الخطوة الثانية: ارسم خطا رأسيا، و آخر أفقيا حيث يتم تسجيل الساق على اليسار ويتم تسجيل الأوراق على اليمين.

الخطوة الثالثة: اكتب الأوراق المناظرة لكل ساق على الجانب الأيمن من الخط فمثلًا للعدد : ١٩ اكتب ٩ الى يمين الرقم ١ ، والعدد ٦ إلى يمين الرقم صفر وهكذا حتى ندون

الأوراق	الساق
٧ ٦ ٥	٠
٠ ٩ ٨ ٣ ١ ٢ ٢ ٢ ١	١
٥ ١ ١ ٠	٢

المفتاح ٢٥ = ٢|٥

جميع البيانات مع تكرار الورقة بعدد مرات تكرارها فى البيانات.

الخطوة الرابعة: رتب الأوراق ترتيبًا تصاعديًا ، ثم ضع مفتاحًا يوضح كيف تقرأ البيانات

تكتب الأوراق مهما تكررت أكثر من مرة

الساق	الأوراق
٠	٥ ٦ ٧
١	٠ ١ ١ ٢ ٢ ٢ ٣ ٨ ٩
٢	٠ ١ ١ ٥

يمثل رقم العشرات — يمثل رقم الآحاد

المفتاح ١٣ = ١|٣

لاحظ أن

أكبر عدد من النقاط التى سجلها احد اللاعبين = ٢٥ نقطة

عدد اللاعبين الذين سجلوا أكثر من ١٠ نقاط = ١٢ لاعب

تذكر أن

لأى مجموعة من القيم يكون :

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$

الوسيط: هو القيمة التى تتوسط مجموعة من القيم المرتبة تصاعديًا أو تنازليًا

المنوال: هو القيمة الأكثر تكرارًا أو شيوعًا.

حاول أن تحل

(١) البيانات التالية توضح درجات بعض الطلاب فى مادة الرياضيات

٩٢	٧٨	٧٣	٨٩	٨٦
٨٥	٧٦	٨١	٧٣	٨٨
٨٣	٧٥	٨٣	٨٣	٧١
٨٦	٨٢	٩٤	١٠٠	٩٨

المطلوب:

(أ) تمثيل البيانات بطريقة الساق والأوراق (ب) احسب وسيط هذه الدرجات؟

(جـ) إذا كان تقدير الممتاز يعطى للطلاب الحاصلين على ٨٥ درجة فأكثر فما عدد الطلاب الحاصلين على تقدير ممتاز؟

الربط بالرياضة

مثال

(٢) البيانات التالية تمثل زمن سباق الدراجات فى إحدى الألعاب الأوليمبية .
وهو مقاس بالثانية



٨٩,٤	٩٠,٤	٨٧,٥	٨٤,٣	٨٩,٧	٩٠,٣	٩١,٤
٩١	٨٦,٧	٨٤,١	٨٩,٢	٨٦	٨٩,١	٨٨,٢
٨٩,٥	٩٠,٥	٩٠,٢	٨٩,٢	٩١,١	٨٨,٩	–

المطلوب:

(أ) تمثيل البيانات بطريقة الساق والأوراق

(ب) ما الزمن الذى استغرقه المتسابق الأخير للوصول إلى نهاية السباق؟

الحل

أ) تمثيل البيانات بطريقة الساق والأوراق

البيانات تحتوي على أرقام عشرية وهى تمثل المنزلة الصغري (الأوراق) والأرقام الصحيحة تمثل العشرات (الساق) أقل عدد صحيح ٨٤، وأكبر عدد صحيح هو ٩١ ∴ الساق هو الأعداد من ٨٤ إلى ٩١

ب) المتسابق الأخير قد استغرق من الزمن ٩١,٤ ثانية

زمن سباق الدراجات

الساق	الأوراق
٨٤	١ ٣
٨٦	٠ ٧
٨٧	٥
٨٨	٢ ٩
٨٩	١ ٢ ٢ ٤ ٥ ٧
٩٠	٢ ٣ ٤ ٥
٩١	٠ ١ ٤

ترتيب الأوراق ←

المفتاح ٨٨,٢ = ٨٨|٢

زمن سباق الدراجات

الساق	الأوراق
٨٤	٣ ١
٨٦	٧ ٠
٨٧	٥
٨٨	٢ ٩
٨٩	٤ ٧ ٢ ١ ٥ ٢
٩٠	٤ ٣ ٥ ٢
٩١	٤ ٠ ١

حاول أن تحل

الربط بالأوزان

٢) التمثيل المجاور يمثل متوسط أوزان الكتاكيت بالجرام

أ) ما أقل وأعلى وزن ؟

ب) ما وسيط هذه الأوزان ؟

ج) ما المنوال لهذه الأوزان؟





أوزان الكتاكيت

الساق	الأوراق
٥	٠ ٩
٦	٤ ٥ ٧ ٨
٨	٣ ٣ ٣ ٥ ٧ ٨
٩	٠ ١ ٥ ٥ ٩

المفتاح ٨٣ = ٨|٣

تعلم

التمثيل المزدوج بالساق والأوراق

يمكن مقارنة مجموعتين من البيانات بالتمثيل المزدوج بطريقة الساق والأوراق حيث يكون الساق للبيانات الأولى هو نفسه الساق للبيانات الثانية وتكون الأوراق للبيانات الأولى على يمين الساق والأوراق للبيانات الثانية على يسار الساق .

مثال

③ البيانات التالية تمثل درجات الحرارة العظمى والصغرى لمدينة الاسكندرية خلال أسبوعين

درجة الحرارة العظمي	١٩	٢٨	٢٢	٢٩	٢٥	٢٩	٣٢	٣٥	٣٦	٣٤	٣٧	٣٩	٤١	٤٢
درجة الحرارة الصغري	١٣	٢٢	١٩	١٨	١٦	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٣	٢١	٣٠	٣٢	٣١

المطلوب تمثيل درجة الحرارة بالساق والأوراق مع وصف هذه الدرجات وأى من هذه الدرجات اكثر تباينا

الحل

تبلغ أكبر درجة حرارة عظمى ٤٢ درجة وأقل درجة حرارة عظمى ١٩ درجة

- الساق يكون من ١ الى ٤

عظمي	الساق	صغري
٩	١	٣ ٦ ٨ ٩
٢ ٥ ٨ ٩ ٩	٢	٠ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣
٢ ٤ ٥ ٦ ٧ ٩	٣	٠ ١ ٢
١ ٢	٤	

٣٢ = ٣|٢ المفتاح ١٣ = ١|٣

- من الشكل المقابل نجد أن كل درجات الحرارة العظمى تتراوح بين (١٩ – ٤٢) بينما نجد أن كل الدرجات الصغرى تتراوح بين (١٣ – ٣٢)



تذكر أن

المدى
الفرق بين أكبر مفردة وأقل مفردة

- مدى درجة الحرارة العظمى = ٢٣ ، مدى درجات الحرارة الصغرى = ١٩ ومنها: نجد أن درجات الحرارة العظمى أكثر تباينًا من درجات الحرارة الصغرى

مميزات طريقة تمثيل البيانات بالساق والأوراق

يتم الاحتفاظ بالبيانات الأصلية عكس الجداول التكرارية التى لا يمكن العودة للبيانات الأصلية بعد تمثيلها فى الجداول التكرارية كما سبق أن درست ذلك.

عيوبها

لا تكون مناسبة للبيانات ذات الأحجام الكبيرة.

حاول أن تحل

③ **الربط بالصحة** يمثل الجدول التالى اعداد المرضى المترددين من الرجال والنساء على أحد المستشفيات خلال أسبوع
مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق مع وصف هذه البيانات وأى من هذه البيانات أكثر تباينا.

	أعداد المرضى المترددين	
القسم	رجال	نساء
جراحة عامة	٥٢	٤٧
أنف وأذن وحنجرة	٦١	٤٢
باطنة	٤٢	٤٢
القلب	٦٠	١٧
العيون	٤٤	٤٢
الكلى	٥٠	٥٤
الولادة والاخصاب	٤٢	٥٢
الأطفال	٥٥	٤٢
المسالك البولية	٤٩	٢٩
العظام والكسور	٤٦	٣٧



١) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، علامة (✗) اأمام العبارة الخطأ لكل من:

التمثيل المقابل يمثل ارتفاع مجموعة من الأشجار بالمتر

الساق	الأوراق
٠	١ ٢ ٤ ٥ ٦ ٨ ٩
١	٠ ١ ١ ٥ ٧
٢	٢ ٥
٣	٦

المفتاح ← ١٥ = ١|٥

أ) معظم الاشجار يكون ارتفاعها أقل من ٢٠ متر. ( )

ب) الوسيط لإرتفاع الأشجار هو ١١ متر. ( )

ج) المدى لإرتفاع الأشجار هو ٣٥ متر . ( )

د) المنوال لإرتفاع الأشجار هو ١١ متر. ( )

٢) البيانات التالية تمثل أعداد كتب الرياضيات فى مكتبات ١٥ مدرسة:

الساق	الأوراق
٠	١ ١ ١ ٢
١	٠ ١ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣ ٤
٢	١ ١

المفتاح ← ١٣ = ١|٣



المطلوب كتابة البيانات الاصلية لعدد الكتب لكل مدرسة

الربط بالأطوال

٣) البيانات التالية تمثل أطوال ٣٠ طالبًا بأحد المدارس الثانوية مقاسة بالسنتيمتر

١٨٢	١٨٠	١٧٧	١٦٧	١٦٥	١٧٤	١٧٥	١٦١
١٦٥	١٦٢	١٨٨	١٨٥	١٧٦	١٧٠	١٥٧	١٧٠
١٧٨	١٧٥	١٧٣	١٦٩	١٧١	١٥٨	١٧٢	١٥٩
		١٨١	١٧٨	١٧٠	١٧٢	١٥٨	١٦٤

المطلوب عرض البيانات بإستخدام طريقة الساق والأوراق.

٤) مثل كل مجموعة البيانات التالية بطريقة الساق والأوراق على حدة:

٢٢	٢٩	١٢	٢٧	١٥	١٩	١٣	٢٧	١٢	٩	٢٦	١٠	المجموعة الأولى
١٢	١١	٣٤	١١	٣٥	٢٩	٩	٣٠	١٥	١٠	١٢	١١	المجموعة الثانية
		٢,٢	٤,١	٢,٥	٠,٥	٥,٨	٦,٦	٢	٣	٢,٤	١,١	المجموعة الثالثة

٥) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

الساق	الأوراق
٢٣	٤ ٥
٢٤	٤ ٧ ٩
٢٥	٠ ٤ ٨ ٨
٢٦	٣ ٨ ٩
٢٧	١ ٢ ٥

المفتاح ← ٢٤,٧ = ٢٤|٧

(١) فى التمثيل المقابل : أكبر عدد هو ....

أ) ٢,٧١ ب) ٢٣,٥

ج) ٢٧,٥ د) ٢٧٥

(٢) الوسيط للتمثيل السابق هو:

أ) ٢٥,٤ ب) ٢٥,٨

ج) ٢٥٤ د) ٢٥٨

الربط بدرجات الحرارة

(٦) البيانات التالية تمثل درجات الحرارة العظمى و الصغرى لبعض محافظات جمهورية مصر العربية:

(أ) مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق (تمثيل مزدوج)؟

(ب) أوجد الوسيط لكل مجموعة على حدة؟

(جـ) أى من هذه الدرجات أكثر تباينًا؟

المحافظة	درجة الحرارة العظمى	درجة الحرارة الصغرى
القاهرة	٢٧	٢٢
الجيزة	٢٦	٢٢
الفيوم	٣٠	٢٥
الاسكندرية	٢٥	١٧
دمياط	٢٦	١٨
الاقصر	٣٦	٢٢
أسوان	٤١	٣٢
بنى سويف	٣٠	٢٤



الوحدة الثانية
٢ - ٢
الرباعيات وتمثيلها بيانياً
Quartiles and Boxplot

سوف تتعلم
- الرباعيات وتمثيلها بيانيًا
- تعيين الرباعيات من الجداول التكرارية
- تعيين الرباعيات بطريقة الساق والأوراق
- التمثيل الصندوقى .

المصطلحات الأساسية
- الربيع الأدنى (الأول)
- الربيع الأوسط (الثانى)
- الربيع الأعلى (الثالث)
- التمثيل الصندوقى
- الساق والأوراق
- الجدول التكرارى
- التكرار المتجمع الصاعد



فكر و ناقش



نفذ معلمو الرياضيات في إحدى المدارس اختبار نصف الفصل الدراسى لعدد ٢٠٠ طالب، وتم تدوين النتائج بدفتر الدرجات وترتيب الطلاب باستخدام برنامج Excel وقسم الطلاب إلى قسمين متساويين عن طريق مقياس إحصائى هو الوسيط (أحد مقاييس النزعة المركزية) إلى الأضعف والمتفوقين وذلك لعمل برامج تقوية مناسبة لكل مستوى.

إلا أن هذا التقسيم لم يكن كافيًا لوصف المستوى التحصيلى للطلاب. وطلب موجه المادة تقسيم الطلاب إلى المستويات التالية : (ضعيف مقبول - جيد - ممتاز) فأمكن تقسيم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية.

فكيف تنفذ ذلك سواء كانت البيانات مفردة أو ممثلة بجدول تكرارى أو طريقة الساق والأوراق وماذا نسمى القيّم التي تقسم هذه البيانات ؟

تعلم

بعدترتيب البيانات تصاعديًا أوتنازليًا فإن القيَّم التى تقسم البيانات إلى أربعة أقسام متساوية تسمى "الرباعيات" وعددها ثلاث قيمّ هى :

١- **الربيع الأول ($ر_١$):** وهو القيمة التي يسبقها $\frac{1}{4}$ البيانات (٢٥ ٪) و يليها ثلاثة أرباع البيانات.

٢- **الربيع الثانى ($ر_٢$):** وهو الوسيط أى القيمة التى يسبقها $\frac{1}{2}$ البيانات (٥٠ ٪) و يليها النصف الآخر.

٣- **الربيع الثالث ($ر_٣$):** وهو القيمة التى يسبقها $\frac{3}{4}$ البيانات (٧٥ ٪) ويليها ربع البيانات (٢٥٪).

تعيين الرباعيات من البيانات المفردة (غير المبوبة)

يوجد حالتان :

الحالة الأولى: إذا كان عدد البيانات ن فرديًا،(ن + ١) يقبل القسمة على ٤، فإن الرباعيات تكون إحدى قيم البيانات المعطاة ويعين مباشرة منها كالتالى:

ترتيب الربيع الأول ($ر_١$) = $\frac{ن + ١}{٤}$

ترتيب الربيع الثانى ($ر_٢$) = $\frac{ن + ١}{٢}$ (الوسيط)

ترتيب الربيع الثالث ($ر_٣$) = $\frac{٣(ن + ١)}{٤}$

مثال

(١) أوجد الرباعيات الثلاثة للقيمّ التالية :٢٣ ، ٧ ، ١٦ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١ ، ٢١ ، ١٥ ، ٢٢ ، ١٤ ، ١١ ، ١٠ ، ٩ ، ٣

الحل

١ ، ٢ ، ٣ ، (٤) ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، (١٠) ، ١١ ، ١٤ ، ١٥ ، (١٦) ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣

(٤) ← $ر_١$ ، (١٠) ← $ر_٢$ ، (١٦) ← $ر_٣$

أولاً : ترتيب البيانات تصاعديًا

ثانيًا: عددالبيانات ن = ١٥(عدد فردي)

ن + ١ = ١٦ (يقبل القسمة على ٤) ∴ الرباعيات تكون احدى قيم البيانات

ترتيب الربيع الأول ($ر_١$) = $\frac{١٥ + ١}{٤}$ = $\frac{١٦}{٤}$ = ٤ وقيمته = ٤

ترتيب الربيع الثانى ($ر_٢$) = $\frac{١٥ + ١}{٢}$ = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ وقيمته = ١٠

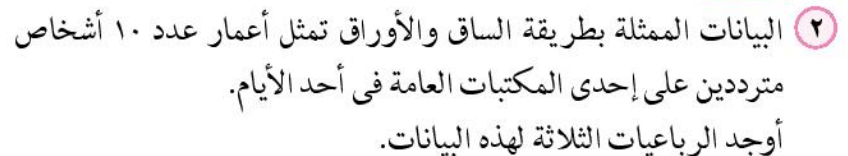
ترتيب الربيع الثالث ($ر_٣$) = $\frac{٣(١٥ + ١)}{٤}$ = $\frac{٤٨}{٤}$ = ١٢ وقيمته = ١٦

> **لاحظ**
> الفرق بين ترتيب الربيع وقيمته

الحالة الثانية: إذا كان عددالبيانات ن زوجيًا أو فرديًا،(ن + ١)لايقبل القسمة على ٤،فإنه يتم تعيين الرباعيات من القانون التالى:

قيمة الربيع المطلوب = القيمة السابقة له + (القيمة التالية له – القيمة السابقة له) (ترتيبه – الترتيب السابق له)

مثال



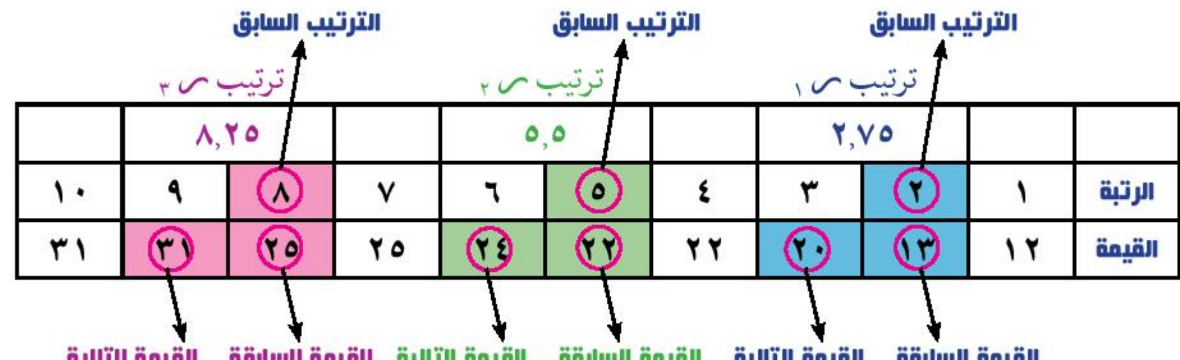
(٢) البيانات الممثلة بطريقة الساق والأوراق تمثل أعمار عدد ١٠ أشخاص مترددين على إحدى المكتبات العامة فى أحد الأيام.
أوجد الرباعيات الثلاثة لهذه البيانات.



الحل

الأوراق	الساق
٢ ٣	١
٠ ٢ ٢ ٤ ٥ ٥	٢
١ ٣	٣

المفتاح ← ٢٤ = ٤\|٢



			٢,٧٥			٥,٥			٨,٢٥	
الرتبة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
القيمة	١٢	١٣	٢٠	٢٢	٢٢	٢٤	٢٥	٢٥	٣١	٣١

ترتيب الربيع الأول $ر_١ = \frac{(ن+١)}{٤} = \frac{(١٠+١)}{٤} = ٢,٧٥$

ترتيب الربيع الثاني $ر_٢ = \frac{(ن+١)}{٢} = \frac{(١٠+١)}{٢} = ٥,٥$

ترتيب الربيع الثالث $ر_٣ = \frac{٣(ن+١)}{٤} = \frac{٣٣}{٤} = ٨,٧٥$

قيمة $ر_١ = ١٣ + (٢٠ - ١٣)(٢,٧٥ - ٢) = ١٨,٢٥$

قيمة $ر_٢ = ٢٢ + (٢٤ - ٢٢)(٥,٥ - ٥) = ٢٣$

قيمة $ر_٣ = ٢٥ + (٣١ - ٢٥)(٨,٢٥ - ٨) = ٢٦,٥$

حاول أن تحل

(١) في المثال السابق أوجد الوسيط بطريقتين مختلفتين ثم قارن النتيجتين ؟

(٢) اوجد الرباعيات الثلاثة (الأدنى - الأوسط - الأعلى) للبيانات المقابلة

الساق	الأوراق
٠	٦ ٧ ٥
١	٩ ٠ ١ ٣ ٨ ٢ ٢ ١ ٢
٢	٥ ١ ٠ ١

المفتاح ← ١٩ = ١|٩

إيجاد الرباعيات من الجداول التكرارية :

سبق أن تعلمت إيجاد قيمة الوسيط بيانيًا عن طريق تعيين تقاطع المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد مع المنحنى التكرارى المتجمع النازل وهو يمثل الوسيط (الربيع الثانى) وسوف تتعلم طريقة إيجاد الرباعيات كمايلى:

أولاً : تعيين الرباعيات جبريًا :

الخطوة الأولى: ننشئ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الخطوة الثانية: نعين رتب الرباعيات

(رتبة الربيع الأول = $\frac{ن}{٤}$ ، رتبة الربيع الثانى = $\frac{٢ن}{٤}$ ، رتبة الربيع الثالث = $\frac{٣ن}{٤}$)

الخطوة الثالثة: نحدد الفترة (الفئة) التي يقع الربيع المطلوب فيها (تسمى الفترة الربيعية) ونحدد منها بداية الفترة ، طول الفترة ، عدد تكرارات الفترة ،التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع

الخطوة الرابعة: نستخدم القانون التالى لحساب الربيع المطلوب

الربيع المطلوب = بداية فترة الربيع + $\frac{\text{رتبة الربيع} - \text{التكرارات السابقة لفترة الربيع}}{\text{التكرار المناظر لفترة الربيع}}$ × طول الفترة

الربط بالصناعة:



مثال

٣) في أحد المصانع إذا كان الجدول التكرارى التالى يمثل عدد ساعات العمل فى أسبوع لعدد ٥٠ عاملًا، فأوجد الرباعيات الثلاثة

الحل

عدد ساعات العمل	٢٢	٢٧	٣٢	٣٧	٤٢	٤٧	المجموع
عدد العمال (التكرار)	٩	٣	١٠	٨	١٢	٨	٥٠

تكوِّن جدول التكرار المتجمع الصاعد المناظر:

الجدول التكرارى		المتجمع الصاعد	
الفترة	التكرار	الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
٢٢	٩	أقل من ٢٢	صفر
٢٧	٣	أقل من ٢٧	٩
٣٢	١٠	أقل من ٣٢	١٢
٣٧	٨	أقل من ٣٧	٢٢
٤٢	١٢	أقل من ٤٢	٣٠
٤٧	٨	أقل من ٤٧	٤٢
		أقل من ٥٢	٥٠
المجموع	٥٠		

١) تعيين الربيع الأول $ر_١$:

رتبة $ر_١$ = $\frac{٥٠}{٤}$ = ١٢٫٥

∴ رتبه $ر_١$ يقع في الفترة بين ١٢، ٢٢ (من عمود التكرار المتجمع الصاعد)

∴ بداية فترة الربيع الأول = ٣٢

طول فترة الربيع الأول = ٥

التكرار المناظر لفترة الربيع = ١٠

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الأول = ١٢

بالتعويض في قانون تعيين الربيع الأول

$ر_١$ = ٣٢ + $\frac{١٢٫٥ - ١٢}{١٠}$ × ٥ = ٣٢ + $\frac{٠٫٥ \times ٥}{١٠}$ = ٣٢ + ٠٫٢٥

∴ $ر_١$ = ٣٢٫٢٥

٢) تعيين الربيع الثانى (الوسيط) $ر_٢$:

رتبة $ر_٢$ = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

∴ رتبة $ر_٢$ تقع في الفترة بين ٢٢، ٣٠

∴ بداية فترة الربيع الثانى = ٣٧

طول فترة الربيع الثانى = ٥

التكرار المناظر لفترة الربيع الثانى = ٨

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الثانى = ٢٢

$$ر_{٢} = ٣٧ + \frac{٢٥ \quad ٢٢}{٨} \times ٥ = ٣٧ + \frac{١٥}{٨}$$

$$ر_{٢} = ٣٧ + ١,٨٧٥ = ٣٨,٨٧٥$$

٣) تعيين الربيع الثالث $ر_{٣}$:

رتبة $ر_{٣} = ٥٠ \times \frac{٣}{٤} = \frac{١٥٠}{٤} = ٣٧,٥$

∴ رتبة $ر_{٣}$ يقع في الفترة بين ٣٠ ، ٤٢

∴ بداية الفترة = ٤٢

طول الفترة = ٥

التكرار المناظر لفترة الربيع الثالث = ١٢

التكرار المتجمع الصاعد السابق لفترة الربيع الثالث =٣٠

$$ر_{٣} = ٤٢ + \frac{٣٧,٥ \quad ٣٠}{١٢} \times ٥ = ٤٢ + \frac{٧,٥ \times ٥}{١٢} = ٤٥,١٢٥$$

ثانياً: تعيين الرباعيات بيانيًا :

سبق وتعلمت إيجاد الوسيط بيانيًا من المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد أو المنحنى التكرارى المتجمع النازل ويمكن تطبيق نفس الطريقة لتعيين الرباعيات وذلك باتباع الخطوات التالية :

الخطوة الأولى: تعيين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الخطوة الثانية: رسم المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

الخطوة الثالثة: تعيين رتب الرباعيات ($\frac{ن}{٤}$، $\frac{ن}{٢}$، $\frac{٣ن}{٤}$) وتحديدها علي المحور الرأسى (التكرارات المتجمعة)

الخطوة الرابعة: عند كل رتبة من رتب الرباعيات نرسم خط أفقى يقطع المنحنى فى نقطة فيكون قيمة الربيع هى مسقط هذه النقطة على المحور الأفقى

مثال

٤) إذا كان التوزيع التكرارى لدرجات الحرارة خلال ٦٠ يومًا متتالية فى فصل الربيع بجمهورية مصر العربية كالتالى :

درجة الحرارة	١٦	١٨	٢٠	٢٢	٢٤	٢٦	٢٨	المجموع
عدد الأيام	٤	٧	١٠	١٨	٩	٧	٥	٦٠

أوجد الرباعيات بيانيًا

الحل

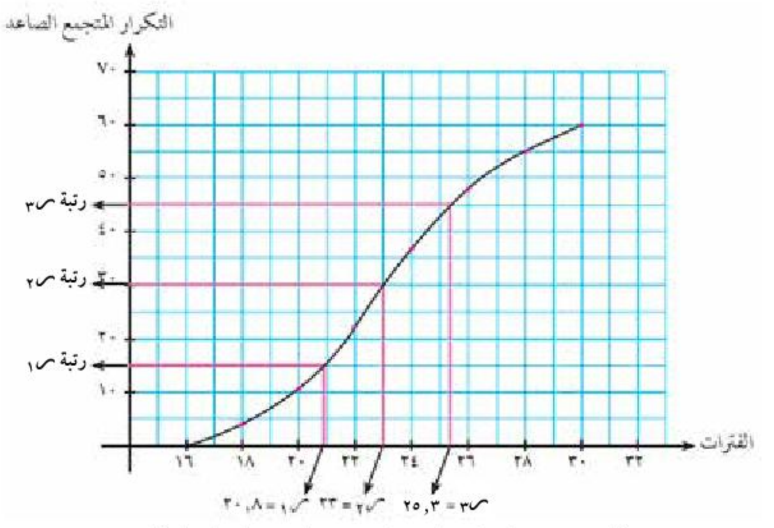
∵ $ن = ٦٠$

∴ رتبة الربيع الاول $ر_١ = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

رتبة الربيع الثانى $ر_٢ = \frac{٦٠}{٢} = ٣٠$

رتبة الربيع الثالث $ر_٣ = \frac{٣ \times ٦٠}{٤} = \frac{١٨٠}{٤} = ٤٥$

الفترة	التكرار	الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع
التوزيع التكرارى		التوزيع المتجمع الصاعد	
١٦	٤	أقل من ١٦	صفر
١٨	٧	أقل من ١٨	٤
٢٠	١٠	أقل من ٢٠	١١
٢٢	١٨	أقل من ٢٢	٢١
٢٤	٩	أقل من ٢٤	٣٩
٢٦	٧	أقل من ٢٦	٤٨
٢٨	٥	أقل من ٢٨	٥٥
المجموع	٦٠	أقل من ٣٠	٦٠



من الرسم نجد أن :

قيمة $ر_١ = ٢٠,٨$

قيمة $ر_٢ = ٢٣$

قيمة $ر_٣ = ٢٥,٣$

حاول أن تحل

(٣) (أ) فى المثال السابق تحقق جبريًا من قيم الرباعيات التى حصلت عليها بيانيًا

(ب) **الربط بالطب:** إذا كان الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لمتوسط الهيموجلوبين فى الدم لعينة مكونة من ٥٠ شخص فأوجد الرباعيات جبريًا وبيانيًا.

مستوى الهيموجلوبين	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	المجموع
التكرار	٣	٥	١٥	١٦	١٠	١	٥٠

حاول أن تحل

(٤) إذا كان الجدول التالى يمثل نتائج امتحانات ٢٠٠ طالب فى مادة الرياضيات على إعتبار أن أقل درجة هى ١٠ والدرجة النهائية هى ٥٠ ، أوجد الرباعيات الثلاثة.

الفئة	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥	المجموع
التكرار	١٢	١٧	٢٠	٣٥	٥٨	٣٨	١١	٩	٢٠٠

تعلم

إيجاد الرباعيات لبيانات ممثلة بطريقة الساق والأوراق :

سبق وأن درسنا أن الوسيط (الربيع الثانى) في البيانات المفردة بعد ترتيبها :

(١) إذا كان ن عددًا فرديًا فإن : الوسيط = قيمة الحد الذى رتبته $\frac{ن + ١}{٢}$

(٢) إذا كان ن عددًا زوجيًا فإن : الوسيط = $\frac{١}{٢}$ [قيمة الحد الذى رتبته $\frac{ن}{٢}$ + قيمة الحد الذى رتبته $\frac{ن}{٢}$ + ١]

وبصورة عامة: إذا كان عدد البيانات هو ن وكان ن +١عدد يقبل القسمة على ٤ فإن الرباعيات هى أحد مفردات الجدول المعطى ونحصل عليها مباشرة من العلاقة التالية:

ترتيب الربيع الأول $ر_١$ (الربيع الأدنى) = $\frac{ن + ١}{٤}$

ترتيب الربيع الأوسط $ر_٢$ الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢}$

ترتيب الربيع الثالث $ر_٣$ (الأعلى) = $\frac{٣(ن + ١)}{٤}$

مثال

(٥) البيانات التالية تمثل درجات ١٥طالبًا فى أحدالاختبارات الشهرية ممثلة بطريقة الساق والأوراق على اعتبار أن الدرجة النهائية من ٣٠، أوجد الرباعيات الثلاثة.

الساق	الأوراق
٠	١ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣
١	٠ ١ ١ ١ ٤
٢	١ ٢ ٢

المفتاح ← ١٠ = ١|٠

الحل

∵ ن = ١٥ ∴ ن + ١ = ١٦ عدد يقبل القسمة على ٤

∵ البيانات فى الجدول مرتبة تصاعديًا

لذا فإننا نوجد ترتيب الرباعيات ونعينها من بيانات الجدول مباشرة

الساق	الأوراق
٠	١ ١ ١ (٢) ٢ ٣ ٣
١	(٠) ١ ١ ١ (٤)
٢	١ ٢ ٢

الربيع الأدنى $ر_١$ ← (٢)
الربيع الأوسط $ر_٢$ ← (٠)
الربيع الأعلى $ر_٣$ ← (٤)

١) الربيع الأول $ر_١$ ترتيبه = $\frac{ن + ١}{٤}$ = $\frac{١٦}{٤}$ = ٤

قيمة الربيع الأول (العنصر الرابع فى الصف الأول)

∴ $ر_١$ = ٢

٢) الربيع الثانى $ر_٢$ ترتيبه = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨

∴ قيمة $ر_٢$ = ١٠ (العنصر الاول فى الصف الثانى)

٣) الربيع الثالث $ر_٣$ ترتيبه

$\frac{٣(ن + ١)}{٤} = \frac{٣ \times ١٦}{٤} = \frac{٤٨}{٤} = ١٢$

∴ قيمة $س_٣$ = ١٤ (العنصر الخامس من الصف الثانى)

التمثيل الصندوقى *Box Plot*

تعلم

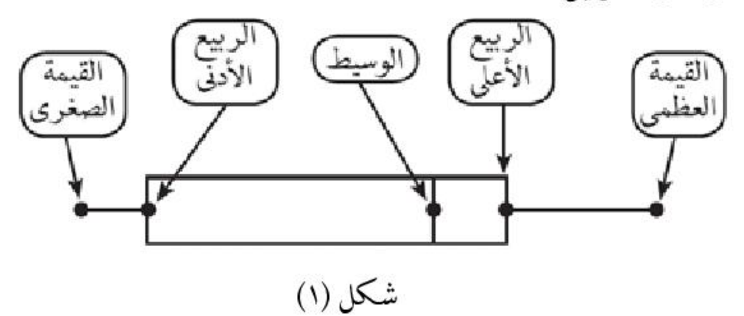
يطلق على الرباعيات أنها مقاييس موضع ترتيبيه وتستخدم لتوضيح مدى توزيع البيانات.

التمثيل الصندوقى يستخدم تلك القيم فى وصف البيانات عن طريق رسم مستطيل بدايته الربيع الأدنى ونهايته الربيع الأعلى وذلك بعد تمثيل البيانات التالية على نفس الخط مرتبة

(القيمة الصغري - الربيع الأدنى - الوسيط - الربيع الأعلى - القيمة العظمى) ويسمي الشكل الناتج (الصندوق ذو الطرفين)

أضف إلى معلوماتك

يوجد مقاييس مواضع أخرى مثل العشيرات (تقسم البيانات إلى عشرة أقسام متساوية والمئينيات التي تقسم البيانات إلى مئة قسم متساو وهكذا ....

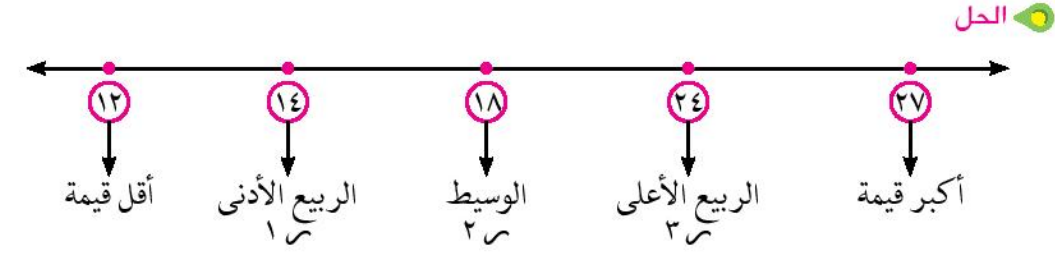


شكل (١)

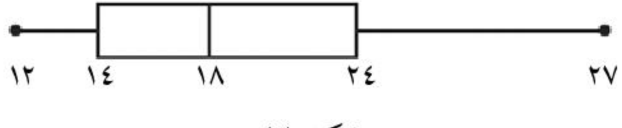
مثال

٦ مثل البيانات التالية ١٤ ، ٢٤ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٤ ، ١٦ ، ٢٦ ، ١٣ ، ٢٧ باستخدام التمثيل الصندوقى.

الحل



التمثيل الصندوقى المناظر للبيانات السابقة كالتالى :



شكل (٢)

١) نلاحظ أن ٥٠٪ من البيانات بين الربيع الأدنى والربيع الأعلى

٢) يمكن رسم التمثيل الصندوقى بطريقة رأسية

٩ حاول أن تحل

٥ عين التمثيل الصندوقى للبيانات التالية

أ) ٢٧ ، ٢٤ ، ٢٠ ، ١٨ ، ١٧ ، ١٥ ، ١٣

ب)

الساق	الأوراق
٤	٠ ٣ ٣ ٦ ٧
٥	١ ٨ ٩
٦	٢ ٣ ٤

المفتاح ← ٥١ = ٥|١



٧ الدرجات التالية تمثل درجات ١٥ طالبًا في امتحان مادة الإحصاء

٣٧	٤٠	٤٥	٢٣	١٨
٤٤	٥٣	٣٨	٤٩	٥٥
١٥	٥٨	٣٥	٣٢	٤٢

أوجد التمثيل الصندوقى لهذه البيانات

الحل

الترتيب التصاعدى للدرجات هو:

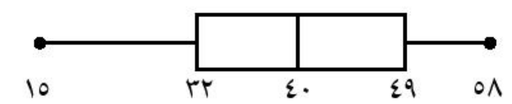
١٥ ، ١٨ ، ٢٣ ، ٣٢ ، ٣٥، ٣٧، ٣٨، ٤٠، ٤٢، ٤٤، ٤٥، ٤٩، ٥٣، ٥٥ ، ٥٨

أصغر قيمة = ١٥ ، أكبر قيمة = ٥٨

الربيع الأول (الأدنى) = ٣٢

الربيع الثانى (الوسيط) = ٤٠

الربيع الثالث (الأعلى) = ٤٩





١ أوجد الربيع الأدنى و الأوسط والأعلى للقيم التالية:

أ) ٧٠ ، ٨١، ٨٢، ٨٥، ٨٨، ٩٠، ٩٣

ب) ٧ ، ٥، ٢، ٧، ٦، ١٢، ١٠، ٤، ٨، ٩

جـ)

الساق	الأوراق
٤	٠ ٣ ٣ ٦ ٧
٥	١ ٨ ٩
٦	٢

المفتاح ← ٥٨ = ٥|٨

(٢) **الربط بالطاقة:** فى دراسة لاستهلاك مجموعة من السيارات تعمل بالبنزين كانت النتائج كالتالى:

عدد الكيلومترات لكل لتر	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥
عدد السيارات	٧	١١	١٢	٧	٦	٨



كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد ثم أوجد الرباعيات بطريقتين مختلفتين..

(٣) التمثيل المجاور يمثل بيانات درجات تلاميذ فصلين مختلفين فى مادة العلوم:

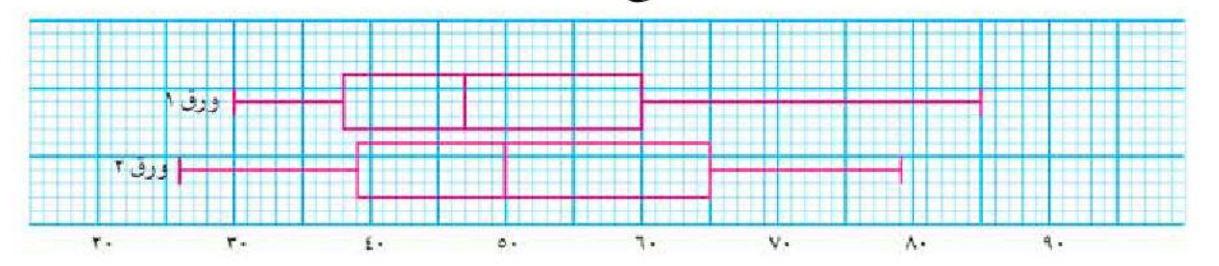
أوجد التمثيل الصندوقى لكل من الفصلين ثم احسب الرباعيات

الفصل الأول	الساق	الفصل الثانى
٤	٣	٢ ٣
٠ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣	٤	٠ ٢ ٣
٠ ٠ ١	٥	٠ ٠ ٢ ٣ ٣ ٤ ٥
٤	٦	١ ٣

المفتاح: ٥|٠ = ٥٠ ، ٢|٤ = ٤٢

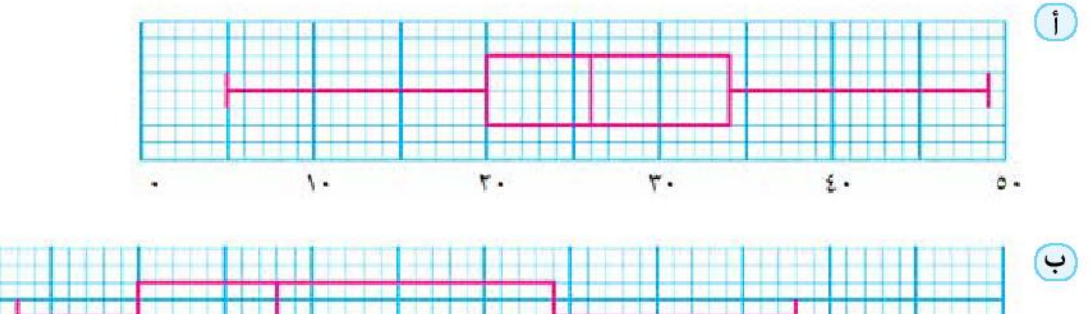
(٤) الشكل التالى يوضح توزيع درجات امتحانيين لمجموعة من الطلاب:

عين الرباعيات لكل منهما و اكتب جملتين توضح وجه المقارنة بين الدرجات.

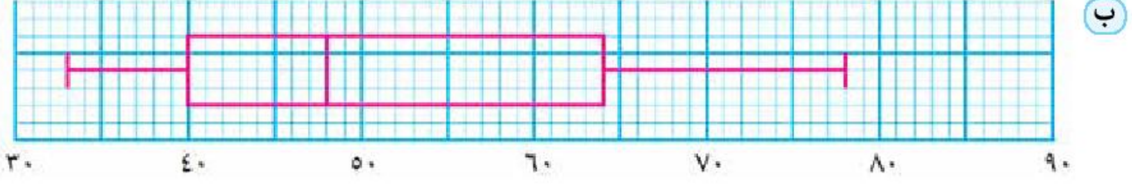


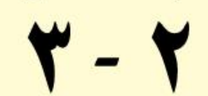
(٥) صف كل تمثيل صندوقى تالى مع توضيح أقل قيمة أكبر قيمة الربيع الادنى الوسيط الربيع الأعلى لكل منهما .

(أ)



(ب)





الوحدة الثانية

٢ - ٣

نصف المدى الربيعى

Half Range Quartile

سوف تتعلم

- نـصف المــدى الربيعى

المصطلحات الأساسية

- المدى
- الربيع الأول
- الربيع الثالث
- نصف المدى الربيعي

فكر و ناقش

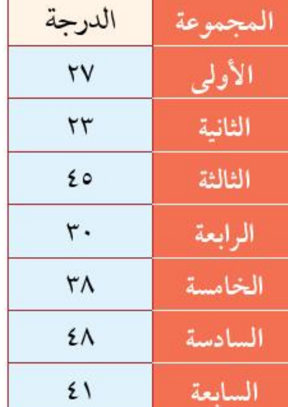
توضح البيانات التالية درجات ٧ مجموعات فى إحدى مسابقات مادة الرياضيات تحت إشراف معلم الفصل مع العلم ان الدرجة العظمى للمادة = ٥٠ درجة

١- أوجد المدى لهذه الدرجات

٢- أوجد الرباعيات الثلاثة لهذه الدرجات

٣- ارسم التمثيل الصندوقى للبيانات

ماذا يمثل طول الصندوق وكم يحتوى من البيانات الأصلية ؟



المجموعة	الدرجة
الأولى	٢٧
الثانية	٢٣
الثالثة	٤٥
الرابعة	٣٠
الخامسة	٣٨
السادسة	٤٨
السابعة	٤١



تعلم

نظرا لعدم احتواء الصندوق على القيم المتطرفة للبيانات وتمثيله لـ ٥٠ ٪ من القيم فسيتم تعريف نصف المدى الربيعى. كمقياس للتشتت كالتالى :

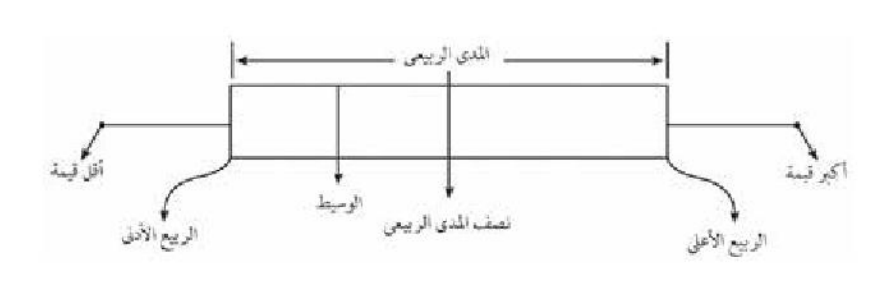
نصف المدى الربيعى = $\frac{\text{الربيع الأعلى} \quad \text{الربيع الأدنى}}{٢}$

أى أن $ر = \frac{ر_٣ \quad ر_١}{٢}$

حيث أن : ر " نصف المدى الربيعى"

$ر_٣$ الربيع الأعلى

$ر_١$ الربيع الأدنى



تذكر أن

بعض مقاييس التشتت التى تم دراستها سابق

١) المدى

٢) الانحراف المعيارى

٣) التباين

مميزات وعيوب نصف المدى الربيعى:

مميزاته : يفضل استخدامه كمقياس للتشتت فى حالة وجود قيم متطرفة كما أنه بسيط وسهل فى الحساب.

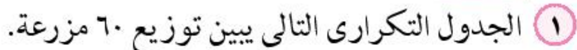
عيوبه : لا يأخذ كل القيم فى الاعتبار

الأدوات المستخدمة برنامج Excel .

الربط بالزراعة

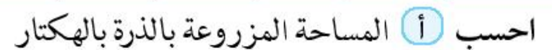
مثال





(١) الجدول التكرارى التالى يبين توزيع ٦٠ مزرعة.

المساحة	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠ ٤٥
عدد المزارع	٣	٩	١٥	١٨	١٢	٣



احسب (أ) المساحة المزروعة بالذرة بالهكتار

(ب) نصف المدى الربيعى للمساحة المزروعة بالذرة



الحل

نتبع الخطوات التالية لحساب نصف المدى الربيعي:



(أ) نوجد رتب الرباعيات للبيانات الموجودة بالجدول

١) رتبة الربيع الأدنى $= \frac{ن}{٤} = \frac{٦٠}{٤} = ١٥$

∴ بداية فئة الربيع الأول = ٢٥

تكرار فئة الربيع الأول = ١٥ ، طول الفئة = ٥

التكرار السابق لفئة الربيع = ١٢

∴ قيمة الربيع الأول $= ٢٥ + \frac{١٥ - ١٢}{١٥} \times ٥$

$ر_١ = ٢٦$

٢) رتبة الربيع الثالث $= \frac{٣ن}{٤} = \frac{٣ \times ٦٠}{٤} = ٤٥$

∴ بداية فئة الربيع الثالث = ٣٥

تكرار فئة الربيع الثالث = ١٢ ، طول الفئة = ٥

التكرار السابق لفئة الربيع = ٤٥

∴ قيمة الربيع الثالث $= ٣٥ + \frac{٤٥ - ٤٥}{١٢} \times ٥ = ٣٥ +$ صفر $= ٣٥$

$ر_٣ = ٣٥$

(ب) نوجد نصف المدى الربيعى $ر = \frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٣٥ - ٢٦}{٢} = ٤{,}٥$

∴ نصف المدى الربيعى للمساحة = ٤,٥ هكتار = ٤٥ الف متر مربع

اضف إلى معلوماتك

الهكتار هو وحدة قياس مساحة ويساوى ١٠٠٠٠ متر مربع

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٥	٠
أقل من ٢٠	٣
أقل من ٢٥	١٢
أقل من ٣٠	٢٧
أقل من ٣٥	٤٥
أقل من ٤٠	٥٧
أقل من ٤٥	٦٠

حاول أن تحل

(١) تبين البيانات التالية جدول التكرار لأعمار ٢٠ معلما

مجموع الأعمار	٣٣	٣٨	٤٣	٤٨	٥٣	مجموع
عدد المعلمين	٣	٧	٤	٢	٤	٢٠

احسب نصف المدى الربيعى لهذه الأعمار

مثال

٢) تبين البيانات التالية درجات مجموعة من التلاميذ فى أحد الاختبارات أوجد نصف المدى الربيعى لهذه الدرجات

الساق	الأوراق
٥	٦ ٩
٦	٤ ٥ ٩
٧	٠ ١ ٣ ٦ ٧ ٨
٨	٠ ٢ ٢ ٥

الحل

ن = ١٥ (حيث ن تمثل عدد البيانات)

∴ رتبة الربيع الأول = $\frac{\text{ن} + ١}{٤} = \frac{١٥ + ١}{٤} = ٤$

∴ $ر_١ = ٦٥$

رتبة الربيع الثالث هو = $\frac{٣(\text{ن} + ١)}{٤} = \frac{٤٨}{٤} = ١٢$

∴ $ر_٣ = ٨٠$

∴ نصف المدى الربيعى هو ر = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢} = \frac{٨٠ - ٦٥}{٢} = \frac{١٥}{٢} = ٧,٥$

حاول أن تحل

٢) فيما يلى كمية الانتاج اليومى من الألبان باللتر لعينة من الابقار اختيرت من مزرعة :

٣٠ ، ٢٧، ١٨، ٢٠، ٢٩، ٣٤، ٢٥ ، ٣٢، ٢٩، ٢١، ٢٣، ٢٨، ٢٥، ١٩

مثل البيانات بطريقة الساق والأوراق واحسب نصف المدى الربيعى





١) أوجد المدى ونصف المدى الربيعي للبيانات التالية :

أ) ٤٦ ، ٦٤، ٥٢، ٦١، ٥٦، ٥٥، ٤٣، ٦٢، ٦٠، ٥١، ٥٤، ٥١

ب) ٤,٣، ٥,٩ ، ٤,١، ١,٥، ٠,٨ ، ١,١، ١,٢، ٢,٤، ١,٥

جـ)



الساق	الأوراق
٠	٣
١	٠ ٠ ٢
٢	٣ ٨ ٩
٣	٠ ٢ ٥ ٥ ٧ ٩
٤	١

المفتاح ← ٢٨ = ٢|٨

الربط بالطول

٢) الجدول التكراري التالي يوضح اطوال ٢٤٠ طالبة بأحدي الجامعات:

الطول بالسنتيمتر	١٤٠	١٤٥	١٥٠	١٥٥	١٦٠	١٦٥	١٧٠	١٧٥	١٨٠	المجموع
عدد الطالبات	٣	١٠	٢١	٥٤	٧٢	٤٨	٢٥	٥	٢	٢٤٠

أوجد نصف المدى الربيعي مع تمثيل البيانات بطريقة الصندوق

الربط بالصحة

③ الجدول التكراري التالي يوضح اوزان عدد من المواليد خلال ١٤ يوم فى احدى المستشفيات:

أوزان المولود بالكيلو جرام	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤	٤,٥	المجموع
عدد المواليد	٣	٧	١٠	٨	٤	٢	٣٤

أوجد الانحراف الربيعى (نصف المدى الربيعى)

④ إذا كانت البيانات التالية تمثل درجات ١٤ طالب فى اختبارين لمادة الرياضيات خلال شهرين متتالين:

الاختبار الأول	١٧	١٨	٥	٤	١١	١٤	١٨	١٨	٦	١٥	١٤	١٥	١١	١٠
الاختبار الثانى	٥	٤	٨	١٠	٨	١٨	١٢	١٢	١٣	١٣	١٨	١٨	١٧	١٦

المطلوب

أ) احسب الرباعيات للاختبارين وكذلك نصف المدى الربيعي

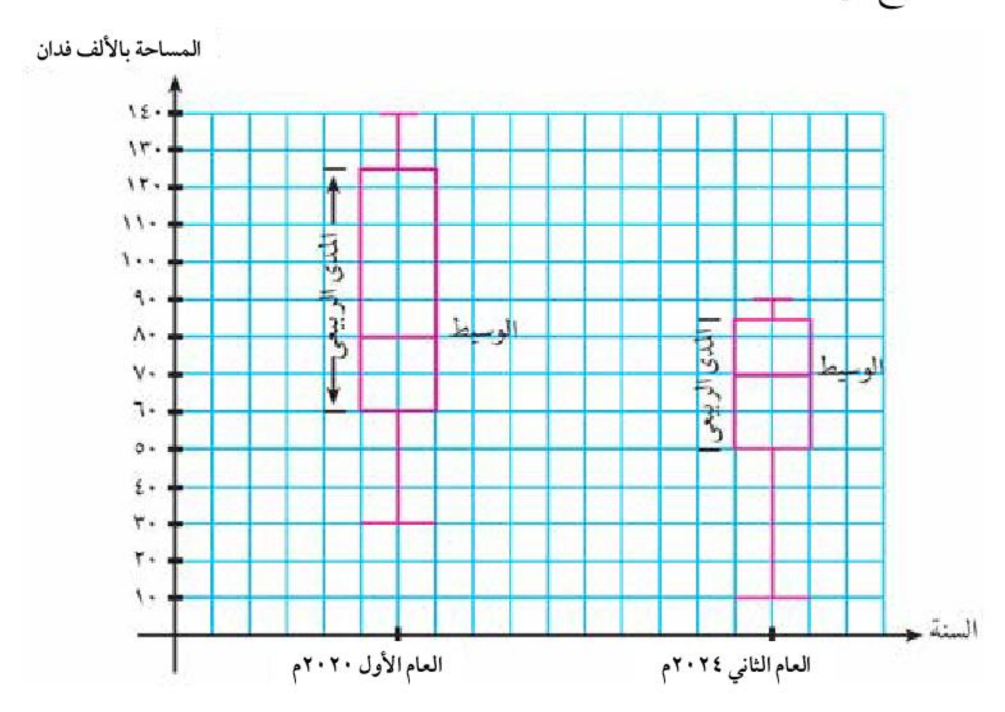
ب) قارن بين درجات الطلاب في الاختبارين مستخدما الوسيط ونصف المدى الربيعي حدد أي من الاختبارين كان أداء الطلاب فيه افضل ولماذا ؟

الربط بالزراعة:

⑤ الرسم البياني التالي يمثل المساحة المزروعة بالألف فدان فى٢٥ قرية خلال عامين مختلفين. المطلوب:

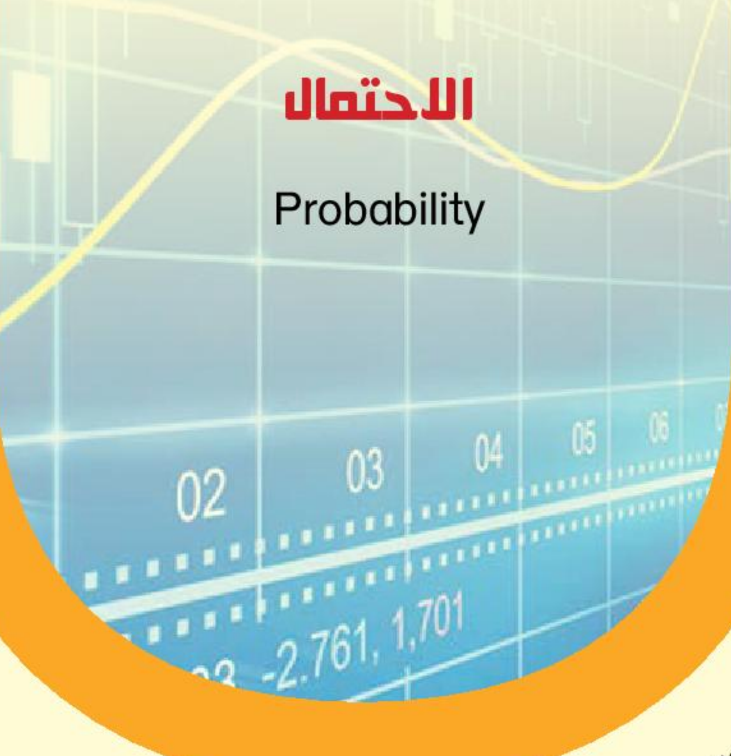
أ) أوجد الربيع الأعلى والربيع الأدنى والوسيط ونصف المدى الربيعي للسنتين ؟

ب) ماذا تستنتج من هذه البيانات ؟





الوحدة ٣



الاحتمال

Probability

مقدمة الوحدة

سبق أن علمنا بأن علم الإحصاء هو أحد فروع مادة الرياضيات والذي يهتم بجمع البيانات وترتيبها وتفسيرها بهدف أتخاذ القرارات المناسبة لظاهرة ما، وتعتبر الاحتمالات الخلفية الرياضية للطرق الإحصائية، وقد استخدمها الباحثون منذ القدم لأسباب اجتماعية واقتصادية وصحية وغيرها،
وقد تأسس علم الاحتمال بشكله الحالى على يد عدد كبير من العلماء نذكر منهم العالم الفرنسى (بيير سيمون لابلاس ١٧٤٩ - ١٨٢٧) ومن العلماء الإنجليز (ديمورجان ١٨٠٦ - ١٨٧١) ،(جون ڤن ١٨٣٤ - ١٩٢٣) والعالم الروسى (أندريه ماركوف ١٨٥٦ - ١٩٢٢) وغيرهم.



بيير سيمون لابلاس



ديمورجان



جون ڤن



أندريه ماركوف

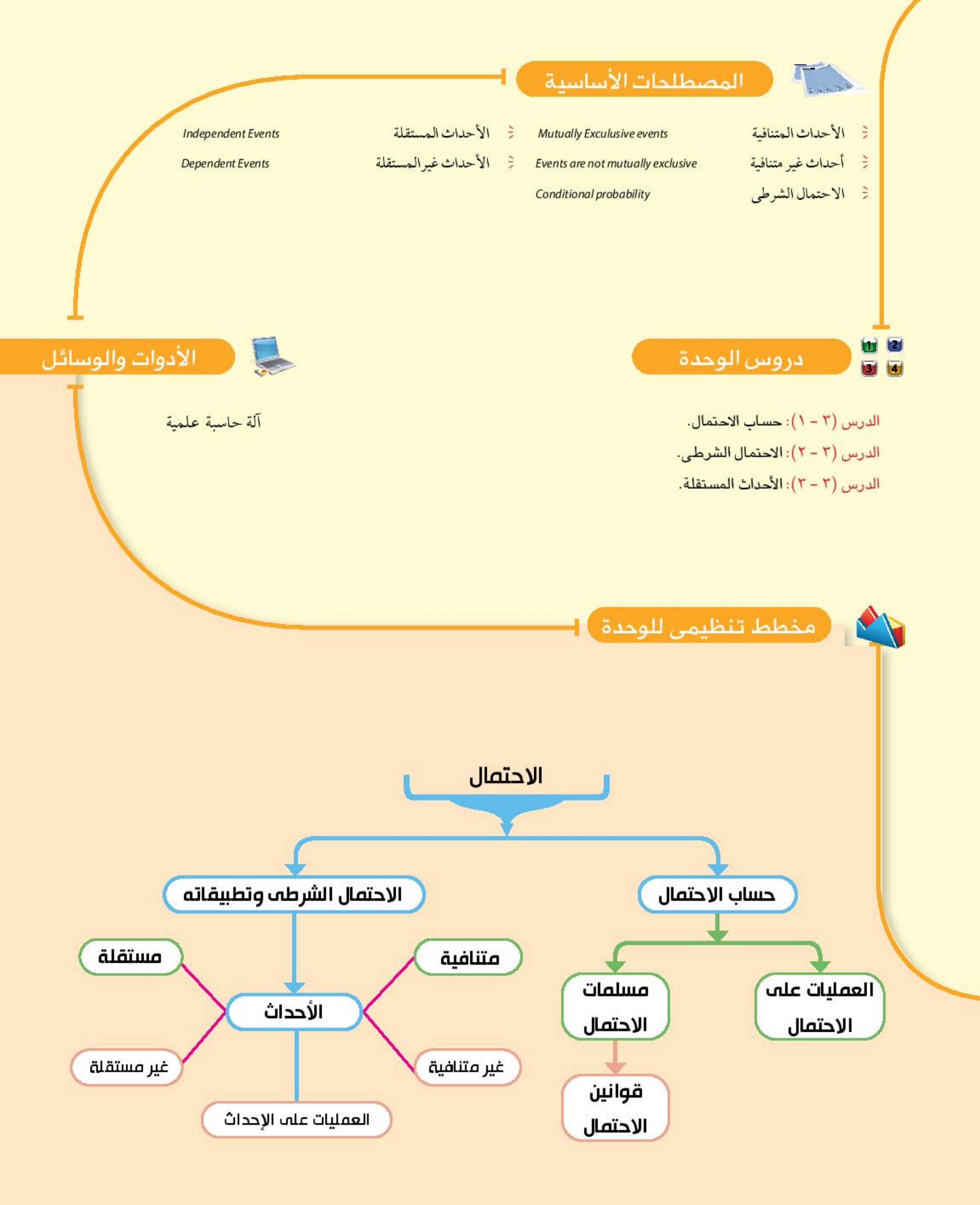
ومن الجدير بالذكر أن تطبيقات الإحصاء والاحتمال كثيرة فى مختلف المجالات التربوية والاجتماعية والاقتصادية، وسوف نتناول فى هذه الوحدة دراسة الاحتمال الشرطى بين حدثين ونظرياته وتطبيقاته في مواقف حياتية مختلفة، كما سندرس الأحداث المستقلة وغير المستقلة .



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف العمليات على الاحداث.
- يتعرف مفهوم الاحتمال.
- يستخدم مسلمات الاحتمال فى حساب الاحتمال وقوع حدث.
- يحل مسائل تطبيقية باستخدام مسلمات الاحتمال.
- يحل مشكلات حياتية باستخدام قوانين الاحتمال.
- يتعرف الأحداث المتنافية وغير المتنافية.
- يتعرف الاحتمال الشرطى.
- يستنتج نظريات على الاحتمال الشرطى.
- يتعرف الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- يطبق الاحتمال الشرطى في مواقف حياتية مختلفة.



المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exculusive events*
- أحداث غير متنافية *Events are not mutually exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*
- الأحداث المستقلة *Independent Events*
- الأحداث غير المستقلة *Dependent Events*

دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١): حساب الاحتمال.

الدرس (٣ - ٢): الاحتمال الشرطى.

الدرس (٣ - ٣): الأحداث المستقلة.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة

حساب الاحتمال

Calculating Probability

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- مفهوم الحدث - الحدث البسيط - الحدث المؤكد - الحدث المستحيل .
- العمليات على الأحداث: الاتحاد - التقاطع - الفرق - الإكمال.
- الأحداث المتنافية .
- قانونا دي مورجان.
- مفهوم الاحتمال
- حساب الاحتمال
- مسلمات الاحتمال وتطبيقات حياتية على الاحتمال

المصطلحات الأساسية

- تجربة عشوائية random experiment
- فضاء العينة sample space
- حدث event
- حدث بسيط simple event
- حدث مؤكد certain event
- حدث مستحيل impossible event
- أحداث متنافية mutually exclusive events
- الاحتمال probability
- مسلمات الاحتمال probability axioms

مقدمة :

سبق أن درست المفاهيم الأساسية للاحتمال بصورة مبسطة، وفى هذا الدرس سوف تستكمل دراسة هذه المفاهيم والعمليات على الأحداث فى حساب إحتمال وقوع حدث ما من خلال أمثلة وتطبيقات حياتية متنوعة.

مصطلحات ومفاهيم أساسية *Basic terms and concepts*




التجربة العشوائية : Random Experiment

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها، ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يتحقق عند إجرائها.

مثال

١) بيِّن أيًّا من التجارب التالية تجربة عشوائية ؟

أ) إلقاء حجر نرد منتظم وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

ب) سحبت كرة ملونة من كيس به مجموعة من الكرات الملونة(دون أن نعرف ألوانها) وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

جـ) إلقاء قطعة نقود معدنية وملاحظة ما يظهر على الوجه العلوى.

د) سحب كرة من كيس به أربع كرات متماثلة فى الحجم والوزن، الأولى بيضاء، الثانية سوداء، الثالثة حمراء، الرابعة خضراء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الحل

التجارب (أ) ، (جـ)، (د) هى تجارب عشوائية؛ لأنه يمكن معرفة جميع نواتج كل منها قبل إجرائها ولكن لانستطيع أن نحدد أيًّا من هذه النواتج سوف يقع عند إجراء التجربة.
بينما تجربة (ب) هى تجربة غير عشوائية؛ لأنه لايمكن تحديد ناتج التجربة قبل إجرائها.

حاول أن تحل

(١) بيِّن أيًّا من التجارب الآتية هى تجربة عشوائية :

(أ) إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات.



سحب بطاقة مرقمة من حقيبة تحتوى على مجموعة من البطاقات المرقمة (دون أن نعرف أرقامها) وملاحظة رقم البطاقة المسحوبة.

(جـ) سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر على البطاقة المسحوبة.



تعلم

تعريف

فضاء العينة (فضاء النواتج) : *Sample space (outcomes space)*

➤ فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز له بالرمز (ف)



ملاحظة:

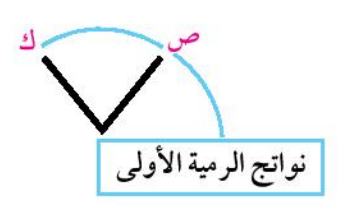
➤ يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف) .

➤ يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا، أو غير منتهٍ إذا كان عدد عناصره غير محدود ، وسندرس فقط فضاء النواتج المنتهي.

فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة :

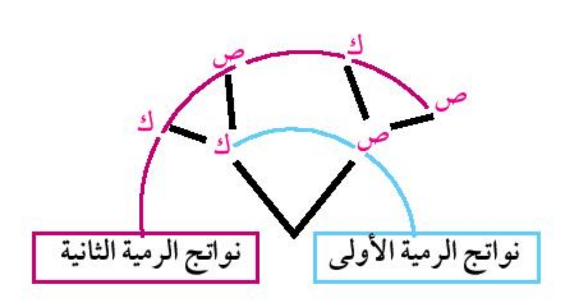


أولاً: إلقاء قطعة نقود : *Tossing a coin*

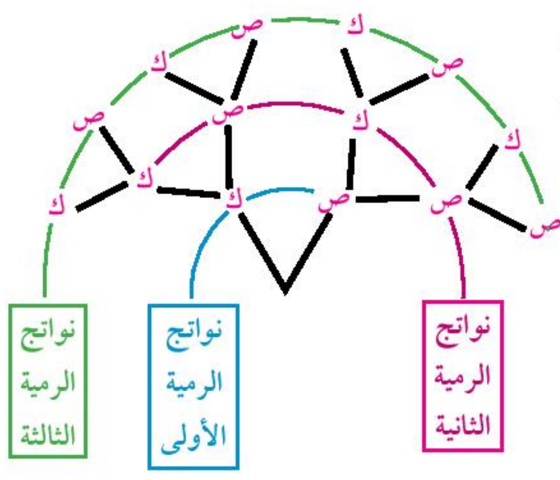


١ - فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف = { ص، ك}
حيث ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة
ويكون : ن(ف) = ٢

٢ - فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو:
ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}
ويكون : ن (ف) = ٢ × ٢ = ٤ = ٢^{٢}



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية المقابلة هو:



ف = { (ص ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ك) ،
(ص ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ،
(ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ،
(ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص)}

ويكون : ن(ف) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ = $٢^٣$

لاحظ من الأمثلة السابقة

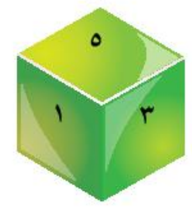
١- عند رمى قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن (ف) = $٢^م$

٢- (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى الشكل أو الحجم) معًا هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين، و يكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب:
(وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية).

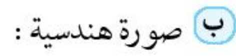
ثانيًا : إلقاء حجر نرد : *Tossing a die*



١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى هو :
ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }   ويكون : ن (ف) = ٦

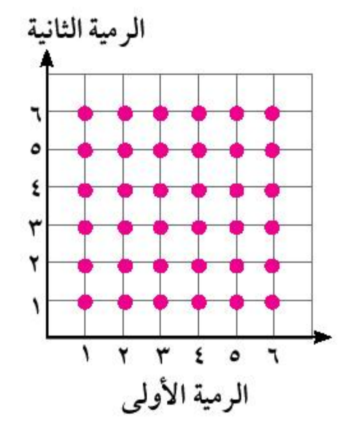
٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر فى كل مرة على الوجه العلوى هو مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول هو ناتج الرمية الأولى، ومسقطها الثانى هو ناتج الرمية الثانية أى أن:
ف = { (س، ص) : س∈ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، ص∈ { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} والأشكال التالية توضح ذلك .

(أ) صورة جدولية :

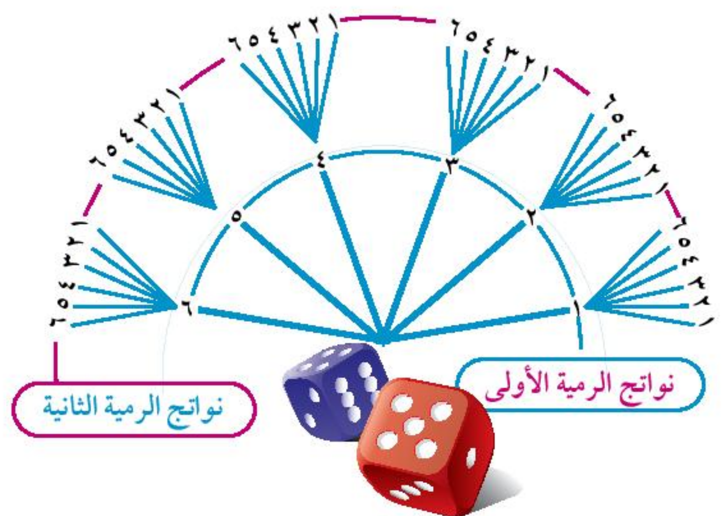


الرمية الأولى / الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١، ١)	(١، ٢)	(١، ٣)	(١، ٤)	(١، ٥)	(١، ٦)
٢	(٢، ١)	(٢، ٢)	(٢، ٣)	(٢، ٤)	(٢، ٥)	(٢، ٦)
٣	(٣، ١)	(٣، ٢)	(٣، ٣)	(٣، ٤)	(٣، ٥)	(٣، ٦)
٤	(٤، ١)	(٤، ٢)	(٤، ٣)	(٤، ٤)	(٤، ٥)	(٤، ٦)
٥	(٥، ١)	(٥، ٢)	(٥، ٣)	(٥، ٤)	(٥، ٥)	(٥، ٦)
٦	(٦، ١)	(٦، ٢)	(٦، ٣)	(٦، ٤)	(٦، ٥)	(٦، ٦)

(ب) صورة هندسية :



(ج) الشجرة البيانية



لاحظ أن:

١- ن (ف) = ٦ × ٦ = ٣٦ = ٦^٢

٢- ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} × {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين فى آن واحد (معًا)، هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.

مثال

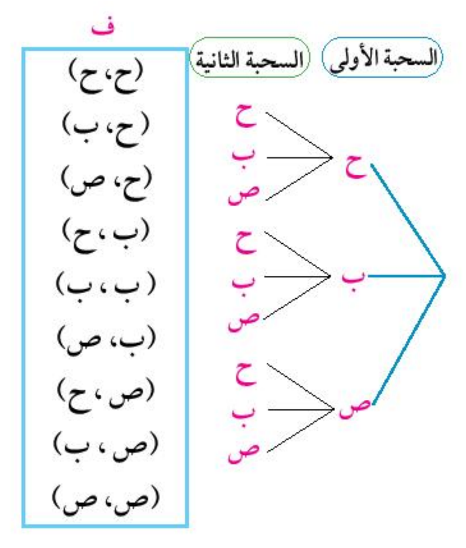
٢ كيس به ثلاث كرات متماثلة الأولى حمراء، والثانية بيضاء، والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة إذا سحبت كرتان الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.

الحل

نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور فى السحبة الثانية، ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية، ويوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) = ٣^٢ = ٩

ف ={(ح،ح)، (ح،ب)، (ح،ص)، (ب،ح)، (ب،ب)، (ب،ص)، (ص،ح)، (ص،ب)، (ص،ص)}



أضف إلى معلوماتك

إذا سحبت الكرة دون إحلال، فهذا يعنى عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها، وبذلك لن يكون هناك فرص لظهورها فى السحبة الثانية.

حاول أن تحل

٢ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سُحِبَت كرتان الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.

تعلم

تعريف

الحدث *The event*

➤ الحدث هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة .

تعريف

الحدث البسيط (الحدث الأولى) *The simple event*

➤ هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصرًا واحدًا فقط.

تعريف

الحدث المؤكد : *The certain event*

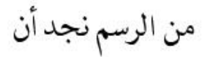
هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف

وهو حدث مؤكد الوقوع في كل مرة تجرى فيها التجربة

الحدث المستحيل *The impossible event*

هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ

وهو حدث مستحيل أى يقع في أى مرة تجرى فيها التجربة



مثال

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورة أو ٣ كتابات .

اكتب فضاء النواتج ف، ثم عين الأحداث الآتية:

أ "حدث ظهور صورة على الأكثر"

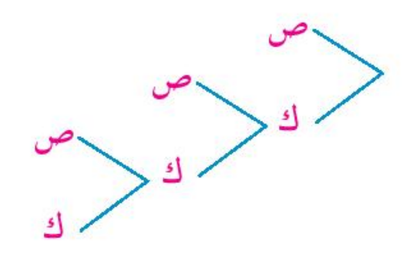
ب "حدث ظهور صورة على الأقل"

ج "حدث ظهور كتابتين على الأقل"

د "حدث ظهور صورتين على الأقل"

الحل

من الرسم نجد أن



ف = {ص ، (ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)}

أ = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)،(ك ، ك ، ك)} = ف

ب = {ص،(ك ، ص)،(ك ، ك ، ص)}

ج = {(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

د = { } = ϕ الحدث المستحيل

حاول أن تحل

(٣) عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات تتوقف التجربة عند ظهور صورتين أو كتابتين.

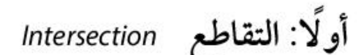
اكتب فضاء النواتج ثم عين الأحداث الآتية:

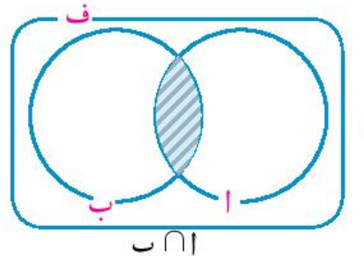
أ "حدث ظهور صورة على الأقل"

ب "حدث ظهور كتابتين على الأكثر"

ج "حدث ظهور كتابة على الأكثر"

العمليات على الأحداث *Operation of the events*

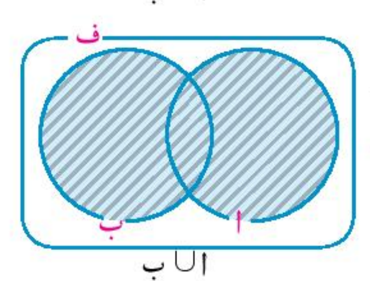

تعلم



ا ∩ ب

أولًا: التقاطع *Intersection*

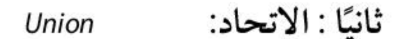
تقاطع الحدثين ا ، ب هو الحدث ا ∩ ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى ا، ب معًا ويعنى **وقوع ا و ب (وقوع الحدثين معًا)**

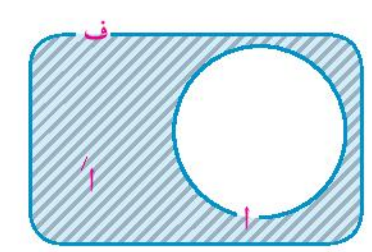


ا ∪ ب

ثانيًا : الاتحاد: *Union*

اتحاد الحدثين ا، ب هو الحدث ا ∪ ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى ا أو ب أو كليهما معًا ويعنى **وقوع ا أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)**

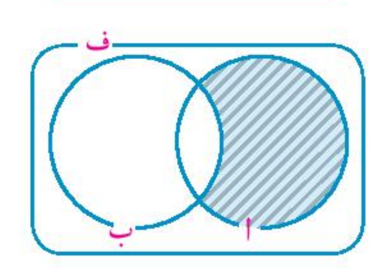




ثالثًا : الإكمال *Completion*

الحدث اَ يسمى الحدث المكمل للحدث ا ، لذلك اَ يحوى كل عناصر فضاء العينة التى لاتنتمى إلى الحدث ا ، ويعنى **عدم وقوع الحدث ا** .

لاحظ : ا ∪ اَ = ف ، ا ∩ اَ = ϕ



رابعًا: الفرق *Difference*

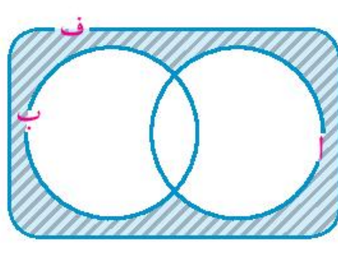
الحدث ا - ب يحوى كل عناصر الفضاء التى تنتمى إلى ا، ولا تنتمى إلى ب وهى أيضًا نفس عناصر ا ∩ بَ

ويعنى **وقوع ا وعدم وقوع ب (وقوع ا فقط)**

ا - ب = ا ∩ بَ = ا - (ا ∩ ب)

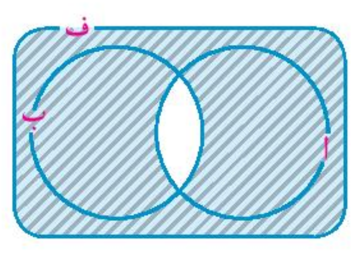
خامسًا: قانونا دى مورجان

إذا كان ا ، ب حدثين من ف فإن :



(أولًا) اَ ∩ بَ = (ا ∪ ب)َ

وتعنى حدث (عدم وقوع أى من الحدثين) أو (عدم وقوع ا وعدم وقوع ب)



(ثانيًا) اَ ∪ بَ = (ا ∩ ب)َ

و تعني حدث "عدم وقوع الحدثين معًا" أو حدث "وقوع أحد الحدثين على الأكثر."



تعلم

الأحداث المتنافية *Mutually exclusive events*

يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى (يمنع) وقوع الآخر.

فمثلاً: ١- إذا كان أ" حدث النجاح فى امتحان ما" ، ب" حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

إذا كان أ حدث ظهور عدد فردى أى : أ = {١، ٣، ٥}

ب حدث ظهور عدد زوجى أى : ب = {٢، ٤، ٦}

فإن أ ∩ ب = ϕ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر .

تعريف

➢ يقال: إن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ

➢ يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذًا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى.

لاحظ :

١- إذا كان أ ∩ ب = ϕ فإن أ ، ب حدثان متنافيان.

وإذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة أحداث من ف وكان : أ ∩ ب = ϕ ، ب ∩ ج = ϕ ، ج ∩ أ = ϕ

فإن: أ ، ب، ج أحداث متنافية والعكس صحيح.

٢- الأحداث البسيطة (الأولية) فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.

٣- أى حدث أ ومكمله أَ هما حدثان متنافيان.

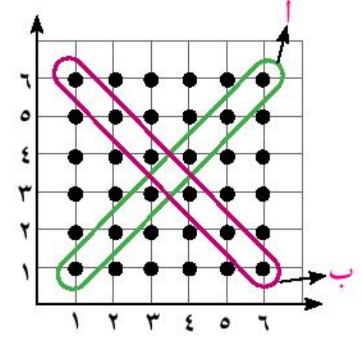
مثال

٤ فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها.

أولاً: مثل فضاء العينة هندسيًا واكتب كلًا من الحدثين الآتيين.

الحدث أ " ظهور نفس العدد على الوجهين" الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧".

ثانيًا : هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .



الحل

أولاً : عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هى أزواج مرتبة عددها = ٦^{٢} = ٣٦

الشكل المقابل هو التمثيل الهندسى لفضاء العينة؛ حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما فى الشكل .

أ = {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

ب = {(٦، ١)، (٥، ٢)، (٤، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ٥)، (١، ٦)}

ثانيًا: ∵ أ ∩ ب = ϕ ∴ أ، ب حدثان متنافيان

حاول أن تحل

٤ فى المثال السابق اكتب كلًّا من الحدثين الآتيين :

ج حدث " ظهور عددين مجموعهما يساوى ٥" د حدث " ظهور عددين أحدهما ضعف الآخر"

هل الحدثان ج، د متنافيان ؟ فسر إجابتك.

الاحتمال *Propability*

تعلم

حساب الاحتمال :

إذا كان ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما، جميع نواتجها (الأحداث الأولية) متساوية الإمكانات، فإن احتمال وقوع أى حدث أ $\subset$ ف يرمز له بالرمز ل (أ) حيث :

$$\text{ل (أ)} = \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

مثال

٥ سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ١٠ كرات متماثلة منها ٥ كرات بيضاء، كرتان لونهما أحمر ، الباقى باللون الأخضر ، احسب احتمال الأحداث الآتية:

أ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

ب حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.

ج حدث أن تكون الكرة ليست خضراء.

الحل

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ل (أ) = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد جميع الكرات}} = \frac{٢}{١٠} = ٠,٢$

احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء + عدد الكرات الخضراء}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$

$= \frac{٢ + ٣}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = ٠,٥$

احتمال أن تكون الكرة ليست خضراء = ل(ج)

= احتمال أن تكون الكرة حمراء أو بيضاء = $\frac{٢ + ٥}{١٠} = ٠,٧$

فكر: هل يمكن الحصول على ل (ج) بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٥) فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

د حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء.

هـ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو خضراء .



مسلمات الاحتمال *Axioms of probability*

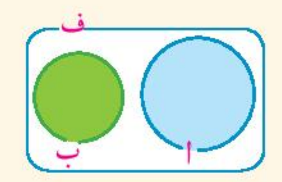
١- لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل(أ)

حيث : ٠ ≥ ل (أ) ≥ ١

٢- ل (ف) = ١

٣- إذا كان أ ⊂ ف، ب ⊂ ف

وكان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب)



من المسلمات السابقة نلاحظ :

المسلمة الأولى تعنى احتمال وقوع أى حدث هو عدد حقيقى ينتمى للفترة [٠، ١]

المسلمة الثانية تعنى أن احتمال وقوع الحدث المؤكد = ١

يمكن تعميم **المسلمة الثالثة** إلى أى عدد محدود من الأحداث المتنافية

ل($أ_١$ ∪ $أ_٢$ ∪ $أ_٣$ ... ∪ $أ_ن$) = ل($أ_١$) + ل($أ_٢$)+ل($أ_٣$) + ...+ ل($أ_ن$)

حيث $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ أحداث متنافية

نتائج هامة

(١) ل (ϕ) = ٠

(٢) ل (أَ) = ١ - ل(أ)

(٣) ل (أ - ب) = ل(أ) - ل (أ ∩ ب)

(٤) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

أضف إلى معلوماتك

إذ كان أ ⊃ ب

فإن ل(أ) ≤ ل(ب)

مثال

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث :

ل(أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(ب) = $\frac{٣}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ احسب :

(أ) ل (أ ∪ ب)   (ب) ل(أَ)   (جـ) ل (أ - ب)   (د) ل (أَ ∩ بَ)

الحل

(أ) ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

ب) ل (أَ) = ١ - ل (أ) $= ١ - \frac{٣}{٨} = \frac{٥}{٨}$

ج) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب) $= \frac{٣}{٨} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٨}$

د) ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ - ل (أ ∪ ب) $= ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

حاول أن تحل

٦) في المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أ) ل (بَ) ب) ل(ب - أ) ج) ل (أَ ∪ بَ)

مثال

٧) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء تجربة عشوائية ف وكان ل(أ) $= \frac{٥}{٨}$ ، ل (ب) $= \frac{١}{٢}$ ، ل (أ - ب) $= \frac{٣}{٨}$ فأوجد :

أ) ل (أ ∩ ب) ب) ل(أ ∪ ب) ج) ل (أَ ∩ بَ) د) ل (أَ ∪ ب)

الحل

أ) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) - ل (أ - ب) $= \frac{٥}{٨} - \frac{٣}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

ب) ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) $= \frac{٥}{٨} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

ج) ل (أَ ∩ بَ) = ل (أ ∪ ب)َ = ١ - ل(أ ∪ ب) $= ١ - \frac{٧}{٨} = \frac{١}{٨}$

د) ل (أَ ∪ ب) = ل (أ ∩ بَ)َ = ١ - ل (أ ∩ بَ) = ١ - ل (أ - ب)

$= ١ - \frac{٣}{٨} = \frac{٥}{٨}$

فكر : هل يمكنك إيجاد ل (أَ ∪ ب) بطريقة أخرى ؟ وضح ذلك

حاول أن تحل

٧) في المثال السابق أوجد :

أ) ل (أَ) ب) ل (أَ ∪ بَ) ج) ل (ب ∩ أَ)

مثال

٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف، وكان ل(أَ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ، ل(ب) = $\frac{١}{٢}$

، ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد :

أ) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ب) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

ج) احتمال وقوع الحدث ب فقط. د) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط.

الحل

∵ ل (أَ ∪ بَ) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب)َ = ١ - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٨}$

∵ ل (أَ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ ١ - ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ ل(أ) ∴ $\frac{٤}{٣}$ ل(أ) = ١ ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٤}$

أ) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب) $= \frac{٣}{٤} + \frac{١}{٢} - \frac{٣}{٨} = \frac{٧}{٨}$

ب) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر = ل (أ ∩ ب)َ = ل (أَ ∪ بَ) $= \frac{٥}{٨}$

(ج) احتمال وقوع الحدث ب فقط = ل (ب - أ) = ل(ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$

(د) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٧}{٨}$ - $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

فكر: هل يمكنك إيجاد احتمال وقوع أحد الحدثين فقط بطريقة أخرى؟ وضح ذلك.

حاول أن تحل

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب)َ = ٠,١

فاحسب احتمال الأحداث الآتية :

(أ) حدث "وقوع أحد الحدثين على الأقل"
(ب) حدث" وقوع أ فقط"
(ج) حدث " وقوع أحد الحدثين فقط"
(د) حدث " وقوع أحد الحدثين على الأكثر"

مثال

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل (ب) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب)= ٠,٧٢ أوجد ل (أ) ، ل (ب)

أولًا: إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين .

ثانيًا: إذا كان أ ⊂ ب

الحل



بفرض أن ل (أ) = س ∴ ل (ب) = ٣ س

أولًا: ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.

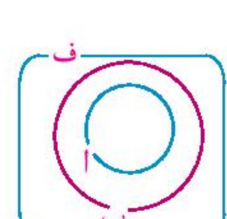
∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) فيكون : ٠,٧٢ = ٣ س + س

∴ س = ٠,١٨ ، ل (أ) = ٠,١٨ ، ل (ب) = ٠,٥٤

ثانيًا: ∵ أ ⊂ ب ، أ ∪ ب = ب

ل (أ ∪ ب) = ل (ب) = ٣س = ٠,٧٢

∴ ل (أ) = ٠,٢٤ ، ل (ب) = ٠,٧٢



حاول أن تحل

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، حيث :

ل(ب) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ)

(أ) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين.
(ب) إذا كان ب ⊂ أ

تفكير ناقد:

بيِّن كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ ⊂ ف ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، إذا كان: $\frac{ل (أ)}{ل (أَ)}$ = $\frac{٣}{٧}$

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ف = { أ ، ب ، ج} ، وكان $\frac{ل(أ')}{ل(أ)} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ل(ب')}{ل(ب)} = \frac{٥}{٢}$ ،
أوجد ل(ج)

مثال

(١٠) **الربط بالبيئة المدرسية:** إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان الفيزياء يساوى ٠,٨٥، واحتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات ٠,٩ واحتمال نجاحه فى الامتحانين معًا ٠,٨ أوجد احتمال :

أ نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل. ب نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط.

ج عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا.

الحل

ليكن أ حدث نجاح الطالب فى امتحان الفيزياء ، ب حدث نجاح الطالب فى الرياضيات

فيكون : ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

أ احتمال نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل = ل (أ ∪ ب)

∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,٩٥

ب احتمال نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات وعدم نجاحه فى امتحان الفيزياء أى ل (ب - أ)

∴ ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (ب ∩ أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١

ج حدث عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا = (أ ∩ ب)' وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب)' = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

تطبيقات حياتية:

حاول أن تحل

(١١) للحصول على وظيفة فى إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظرى، والآخر عملى، إذا كان احتمال النجاح فى الاختبار النظرى ٠,٧٥ واحتمال نجاحه فى الاختبار العملى ٠,٦ واحتمال النجاح فى الاختبارين معًا ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :

أ نجاحه فى الاختبار النظرى فقط. ب نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل .

تفكير ناقد:

الربط بالرياضة: صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن احتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب ٠,٧ ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب ٠,٩ ، وأن احتمال فوزه فى المباراتين معًا ٠,٥ هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

مثال

(١١) ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، احسب احتمال:

أولاً: أ حدث أن يكون "مجموع العددين الظاهرين أقل من أو يساوى ٤"

ثانيًا: ب حدث أن يكون " أحد العددين ضعف الآخر"

ثالثًا: ج حدث أن يكون "الفرق المطلق للعددين يساوى ٢"

رابعًا: د حدث أن يكون " مجموع العددين أكبر من ١٢ "

الحل

ن(ف) = ٣٦

أولاً: أ = {(١، ١)، (١ ، ٢) ، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٣، ١) } ∴ ن (أ) = ٦، ∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثانيًا: ب = { (١، ٢)، (٢، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٦) ، (٦، ٣)} ∴ ن (ب) = ٦ ∴ ل (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ثالثًا: ج = {(١، ٣)، (٣، ١)، (٢، ٤)، (٤، ٢)، (٣، ٥)، (٥، ٣) ، (٤، ٦) ، (٦، ٤)} ∴ ل(ج) = $\frac{٨}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٩}$

رابعًا: حيث إنه لايمكن أن يظهر عددان مجموعهما أكبر من ١٢، ∴ د = ϕ ، ل (د) = صفر

حاول أن تحل

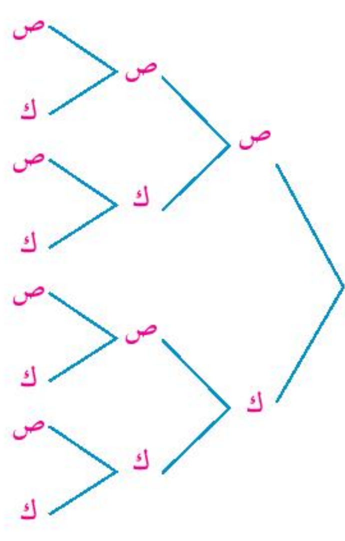
(١٢) فى المثال السابق احسب احتمال الأحداث الآتية :

أولاً: أ حدث " العددان الظاهران متساويان "

ثانيًا: ب حدث " العدد فى الرمية الأولى فردي وفى الرمية الثانية زوجي"

مثال

(١٢) ألقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية، ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الأحداث الآتية :



أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط.

ثانيًا: ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثًا: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.

الحل

ف = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك) ،
(ك، ص، ص)، (ك، ص، ك) ، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}،
ن (ف) = ٨

أولاً: ∵ أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .

أ = { (ص، ك، ك) ، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)} ،

∵ ن(أ) = ٣ ∴ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$

ثانيًا : ∵ ب حدث ظهور صورتين على الأقل، أى إما صورتان أو ثلاث صور

`ب = {(ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}

∵ ن (ب) = ٤ ‏ ‏ ‏ ‏ `ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ثالثًا: ∵ ج حدث ظهور صورتين بالضبط

`ج = {(ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)} ∵ ن (ج) = ٣ ‏ ‏ ‏ ‏ `ل (ج) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(١٣) فى المثال السابق احسب الاحتمالات الآتية :

أولاً : أ حدث ظهورنفس الوجه في الرميات الثلاث **ثانيًا :** ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

ثالثًا: ج حدث ظهور عدد فردى من الصور **رابعًا:** د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامسًا: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات.

مثال

(١٣) **الارتباط بالمجتمع:** فى أحد المؤتمرات حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة، وبياناتهم موضحة بالجدول التالى:

	يتحدث العربية	يتحدث الإنجليزية	يتحدث الفرنسية	المجموع
رجل	٥٠	٤٥	٢٥	١٢٠
امرأة	٤٥	٣٠	٥	٨٠
المجموع	٩٥	٧٥	٣٠	٢٠٠

إذا اختير أحد الحاضرين عشوائيًّا فأوجد احتمال أن يكون هذا الشخص المختار:

(أ) امرأة تتحدث العربية. (ب) رجل يتحدث الإنجليزية.

(ج) يتحدث العربية أو الفرنسية. (د) يتحدث العربية والإنجليزية.

(هـ) امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا يتحدث العربية.

الحل

(أ) احتمال أن يكون المختار " امرأة تتحدث العربية " = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

(ب) احتمال أن يكون المختار "رجل يتحدث الإنجليزية" = $\frac{٤٥}{٢٠٠}$ = ٠,٢٢٥

(ج) احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية أو الفرنسية" = $\frac{٩٥ + ٣٠}{٢٠٠}$ = ٠,٦٢٥

(د) احتمال أن يكون المختار "يتحدث العربية والإنجليزية" = ل (ϕ) = صفر

(هـ) احتمال أن يكون المختار "امرأة لا تتحدث الإنجليزية و لا تتحدث العربية" = $\frac{٥}{٢٠٠}$ = ٠,٠٢٥

حاول أن تحل

(١٤) فى المثال السابق احسب احتمال أن يكون الشخص المختار:

(أ) لا يتحدث الإنجليزية. (ب) يتحدث الألمانية.

(ج) إمرأة تتحدث الفرنسية أو الإنجليزية. (د) رجل يتحدث العربية أو امرأة تتحدث الإنجليزية.

تمـــارين (٣ - ١)

(١) يرغب طالب فى شراء حقيبة ويمكنه اختيارها من ثلاثة أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بُنيًّا ، مثِّل فضاء العينة فى هذا الموقف بالشجرة البيانية.

(٢) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

(أ) اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًّا من الأحداث الآتية.

- الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردى».
- الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجى».
- الحدث ج «ظهور عدد أولى أكبر من ٢».
- الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

(٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

عين كلًّا من الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور عددين متساويين».
- الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٢».
- الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

(٤) من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤} كون عددًا من رقمين مختلفين. مثل فضاء النواتج ف بشكل شجرة، ثم اكتب ف وعيِّن منها الأحداث الآتية :

- أ حدث أن يكون رقم الآحاد فرديًّا .
- ب حدث أن يكون رقم العشرات فرديًّا.
- ج حدث أن يكون كلا الرقمين فرديًّا.
- د حدث أن يكون رقم الآحاد أو رقم العشرات فرديًّا.

(٥) حقيبة بها ٢ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المسجل على البطاقة المسحوبة اكتب الأحداث الآتية :

أ حدث " العدد المسجل زوجى وأكبر من ١٠"

ب حدث " العدد المسجل عامل من عوامل ١٢"

ج حدث "العدد المسجل فردى و يقبل القسمة على ٣"

د حدث " العدد المسجل مضاعف للعددين ٢، ٥ "

هـ حدث " العدد المسجل أولى"

و حدث " العدد المسجل يحقق المتباينة ٥س-٣ ≤ ١٧ "

(٦) سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى من بين ٨ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ مع إعادة البطاقة المسحوبة أولاً قبل سحب البطاقة الثانية ، ما عدد عناصر فضاء العينة ؟ و إذا كان :

أ حدث " العدد فى السحبة الثانية ثلاثة أمثال العدد فى السحبة الأولى"

ب حدث " مجموع العددين أكبر من ١٣"

اكتب كلًّا من أ ،ب هل أ ، ب حدثان متنافيان ؟ فسر ذلك.

(٧) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثِّل فضاء النواتج بشكل شجرى، ثم عيِّن الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابتين على الأقل"

ب حدث " ظهور كتابتين على الأكثر"

ج حدث " ظهور صورة فى الرمية الأولى"

د حدث " عدم ظهور صورة فى الرميات الثلاث "

(٨) ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة الوجه العلوى لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، مثِّل فضاء العينة بشكل شجرى ثم أوجد الأحداث الآتية :

أ حدث " ظهور كتابة وعدد زوجى"

ب حدث " ظهور صورة وعدد فردى"

ج حدث " عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب"

د حدث " وقوع الحدث أ فقط "

هـ حدث " وقوع الحدث أ ووقوع الحدث ب"

اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة :

(٩) إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال الحصول على عدد فردى أقل من ٥ هو:

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٦}$

(١٠) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين، فإن احتمال الحصول على عدد زوجى فى الرمية الأولى وعدد أولى فى الرمية الثانية هو :

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{١}{٤}$

(١١) إذا سحبت كرة عشوائيًّا من صندوق به ٣ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٧ كرات خضراء فإن:
احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو خضراء هو :

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) $\frac{٧}{١٥}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(١٢) يحتوى صندوق على تسع بطاقات متماثلة تحمل الأرقام من ١ إلى ٩ اختيرت بطاقة عشوائيًّا، فإن احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة رقم يقسم العدد ٩ أو رقمًا فرديًّا هو :

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٩}$

(١٣) إذا كان أ ، ب حدثين من ف فضاء النواتج لتجربة عشوائية، وكان ب ⊂ أ ، ل (أ) = ٢ل(ب) = ٠,٦ فإن ل (أ - ب) يساوى:

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (ج) ٠,٤ (د) ٠,٢

(١٤) ألقى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الأعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣ ولوحظ العدد على الوجه العلوي:

(أ) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

- أ "حدث ظهور عدد فردى."
- ب "حدث ظهور عدد أولى."
- ج "حدث ظهور عدد زوجى."
- د "حدث ظهور عدد أكبر من ١٢."
- هـ "حدث ظهور عدد مكون من رقمين."
- و "حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد."

(ب) احسب: ل(أ ∪ ج) ، ل(هـ ∪ و) ، ، ل(ب ∩ د).

(١٥) إذا كان ف = {أ ، ب، ج، د} فضاء عينة لتجربة عشوائية، أوجد:
ل(أ) ، ل(ب) ، إذا كان ل (أ) = ٣ ل(ب)، ل(ج) = ل(د) = $\frac{٧}{١٨}$

(١٦) إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:
ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، ل (أ - ب) = ٠,٢٥ أحسب ل(أ)، ل(ب).

(١٧) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:
(أ) ل(أَ) (ب) ل(أ ∪ ب) (ج) ل(أ - ب) (د) ل(أَ ∩ بَ)

(١٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، حيث:
ل(أ) = ٠,٤ ، ل(بَ) = ٣ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب احتمال:
(أ) وقوع أ فقط. (ب) وقوع أ أو ب. (ج) وقوع أ وعدم وقوع ب.

(١٩) صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء، سحبت منه كرة واحدة عشوائيًّا. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:
(أ) حمراء. (ب) زرقاء أو صفراء. (ج) ليست زرقاء. (د) ليست حمراء ولا صفراء.

(٢٠) مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًّا ولوحظ العدد المدون عليها. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:
(أ) عددًا يقبل القسمة على ٣ (ب) عددًا يقبل القسمة على ٥
(ج) عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥ (د) عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

(٢١) ألقيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة على الأكثر.
- د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الأقل.

(٢٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة، احسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى.
- حدث مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨
- حدث مجموع العددين فى الرميتين أقل من أو يساوي ٥

(٢٣) **الربط بالرياضة:** عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصًا، منهم يشجع نادى الهلال، و٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لايشجعون أيًّا من الناديين.
إذا اختير شخص عشوائيًّا من أفراد العينة، فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى:
(أ) أحد الناديين على الأقل. (ب) الناديين معًا.
(ج) نادى الهلال فقط. (د) أحد الناديين فقط.

(٢٤) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد منتظم وملاحظة الوجه الظاهر لقطعة النقود والعدد الظاهر على الوجه العلوى لحجر النرد، إذا كان أ هو حدث ظهور صورة وعدد أولى ، ب حدث ظهور عدد زوجى . احسب احتمال وقوع كلٍّ من الحدثين أ ، ب ثم احسب احتمال كلًّا من الأحداث الآتية :

أ) وقوع أحد الحدثين على الأقل
ب) وقوع الحدثين معًا
جـ) وقوع ب فقط
د) وقوع أحد من الحدثين فقط

(٢٥) سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من ٥٠ بطاقة متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٥٠، احسب احتمال أن يكون العدد على البطاقة المسحوبة:

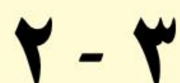
أ) مضاعفًا للعدد ٧
ب) مربعًا كاملًا
جـ) مضاعف للعدد ٧ ومربعًا كاملاً
د) ليس مربعًا كاملًا، وليس مضاعفًا للعدد ٧

(٢٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء نواتج لتجربة عشوائية ف، ل(ب) = $\frac{٤}{٥}$ ل (أ) ، ل (أ -ب) = ٠,٢٤
ل (ب ∩ أَ) = ٠,١٥ أوجد : ل (أ)، ل (ب)، ل (أ ∪ ب)، ل (أَ ∪ بَ)

(٢٧) كتب طارق ٧٥ خطابًا على الآلة الكاتبة، فوجد أن ٦٠٪ منها بلا أخطاء ، وكتب زياد ٢٥ خطابًا أخرى، فوجد أن ٨٠٪ منها بلا أخطاء، فإذا اختير خطاب عشوائيًّا مما تم كتابته بواسطة طارق وزياد، فأوجد احتمال أن يكون هذا الخطاب :

أ) بلا أخطاء .
ب) زياد هو الذى كتب الخطاب.
جـ) زياد لم يخطئ فى كتابته.
د) طارق قد أخطأ فى كتابته .

(٢٨) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف، ل(أ) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٨، ل (أَ ∪ ب) = ٠,٥ فاحسب ل(أَ ∩ ب)



الاحتمال الشرطى

Conditional Probability

سوف تتعلم

- الأحداث المتنافية.
- الأحداث غير المتنافية.
- الاحتمال الشرطى.

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المتنافية *Mutually Exclusive Events*
- أحداث غير متنافية *Events are not Mutually Exclusive*
- الاحتمال الشرطى *Conditional probability*

مقدمة:

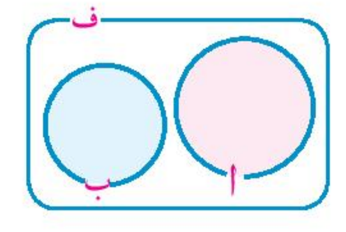
سبق أن درست حساب احتمال حدث ما (وليكن أ) لتجربة عشوائية، وذلك بمعرفة العلاقة بين عدد عناصر هذا الحدث ن(أ) وعدد عناصر فضاء التجربة العشوائية ن(ف) من خلال العلاقة:

$$\text{ل(أ) (احتمال وقوع الحدث أ)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ن(أ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ن(ف)}}$$

الأحداث المتنافية: *Mutually Exclusive Events*

علمت من خلال دراستك للاحتمال بأن الأحداث المتنافية هى الأحداث التى لا يمكن وقوعها فى آن واحد، لأن وقوع أحدها يمنع وقوع الأحداث الأخرى، الأمر الذى يعنى عدم وجود عناصر مشتركة للعناصر المكونة لها.

الحدثان المتنافيان:

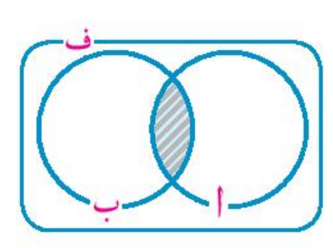


هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر وتقاطعهما هو المجموعة الخالية ϕ .

فإذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن: أ ∩ ب = ϕ

∴ ل (أ ∩ ب) = صفر و يكون ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

الحدثان غير المتنافيان: *Events are not Mutually Exclusive*



هما الحدثان اللذان لا يمنع وقوع أحدها وقوع الحدث الآخر (توجد عناصر مشتركة بينهما)

و يكون:

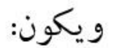
(١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

(٢) ل (أ َ) = ١ - ل (أ)

(٣) ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

(٤) ل (أ ∩ ب َ) = ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

(٥) ل (أ َ ∩ ب) = ل (ب - أ) = ل (ب) - ل (أ ∩ ب)



الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

الاحتمال الشرطى *Conditional Probability*

إذا كان أ ، ب حدثين من ف فإنه في بعض الأحيان تتوافر معلومات بأن حدثًا ما مثل ب قد وقع، ل (ب) فى هذه الحالة قد يكون لوقوع الحدث ب تأثير على احتمال وقوع أ و يمكن حساب احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب من خلال معرفة العلاقة بين نواتج الحدث أ ونواتج الحدث ب.

مثال تمهيدى: فى تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف هو:

ف = {١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، فإذا كان الحدث أ = {١ ، ٢، ٣} هو حدث ظهور عدد أقل من ٤

فمن الواضح أن: $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

و إذا كان الحدث ب = {٢، ٤، ٦} هو حدث ظهور عدد زوجى.

لنتساءل الآن: إذا علمنا أن الحدث ب قد وقع بالفعل فما احتمال وقوع الحدث أ ؟

بمعنى آخر، ما احتمال الحصول على رقم زوجى أقل من ٤؟

نلاحظ أن الشرط المعطى يختزل فضاء العينة إلى المجموعة ب = {٢، ٤، ٦}

ويكون الحدث الموافق لظهور رقم زوجى هو أ ∩ ب = {٢}

وبالتالى فإن الاحتمال المطلوب هو: $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{١}{٦} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$

إن هذا المثال يوضح لنا كيف أن بعض الأحداث تختلف احتمالاتها تبعًا لاختلاف فضاء العينة.




تعلم

الاحتمال الشرطى *Conditional Probability*

إذا كانت ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ ، ب حدثين من هذا الفضاء.

فإن احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب و يرمز له بالرمز ل (أ | ب) و يقرأ احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب يتحدد بالعلاقة التالية:

$$ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} \quad حيث\ ل(ب) > ٠$$

لاحظ أن: الاحتمال الشرطى يتمتع بنفس خواص الاحتمال (غير الشرطى) أى إن:

١- $٠ \leq ل(أ | ب) \leq ١$

٢- $ل(ف | ب) = \frac{ل(ف \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{ل(ب)}{ل(ب)} = ١$

٣- إذا كان $أ_١ \cap أ_٢ = \phi$ فإن $ل[(أ_١ \cup أ_٢) | ب] = ل(أ_١ | ب) + ل(أ_٢ | ب)$

مع ملاحظة أن:

- $ل(أ | ب) \neq ل(ب | أ)$
- ، $ل(أ' | ب) = ١ - ل(أ | ب)$
- ، $ل(أ \cap ب) = ل(أ|ب) \times ل(ب)$ بشرط $ل(ب) > ٠$
- $ل(أ \cap ب) = ل(ب | أ) \times ل(أ)$ بشرط $ل(أ) > ٠$

مثال

الاحتمال الشرطى

(١٤) أُلقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، احسب احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجى؟

الحل

بفرض أن: فضاء العينة ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ، أ = { ٢ } ، ب = { ٢ ، ٤ ، ٦}

فإن: ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٦}$

∵ ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}}$

∴ ل (أ | ب) = $\frac{١}{٦}$ ÷ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٦}$ × ٢ = $\frac{١}{٣}$

احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن العدد الظاهر زوجيًّا هو $\frac{١}{٣}$

لاحظ أن

فى الاحتمال الشرطى لاحظ أن الحدث الذى يلى كلمات " ما احتمال" هو الحدث الذى نبدأ به، والحدث الذى يلى إحدى الكلمات " علمًا بأن أ، إذا كان أ ، إذا علم أ، ...) هو الشرط.

حاول أن تحل

(١) أُلقي حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، ما احتمال ألَّا يزيد عدد النقاط فى الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوى ٢؟

مثال

إجراء العمليات

(١٥) إذا كان أ ، ب حدثين من الفضاء ف بحيث ل(أ) = ٠,٤٥ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (ب | أ) = ٠,٨ أوجد:

(أ) ل (أ ∩ ب) (ب) ل (أ ∪ ب) (ج) ل (أ | ب) (د) ل (بَ | أ)

الحل

(أ) ∵ ل (ب | أ) = $\frac{\text{ل (ب ∩ أ)}}{\text{ل (أ)}}$

∴ ٠,٨ = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{٠,٤٥}$ ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٨ × ٠,٤٥ = ٠,٣٦

(ب) ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٤٥ + ٠,٦ - ٠,٣٦ = ٠,٦٩

(ج) ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل (ب)}}$ = $\frac{٠,٣٦}{٠,٦}$ = ٠,٦

لاحظ أن: ل(أ | ب) ≠ ل(ب | أ)

(د) ل(بَ | أ) = $\frac{\text{ل(بَ ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}}$ = $\frac{\text{ل(أ - ب)}}{\text{ل(أ)}}$

= $\frac{\text{ل (أ) - ل (أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}}$

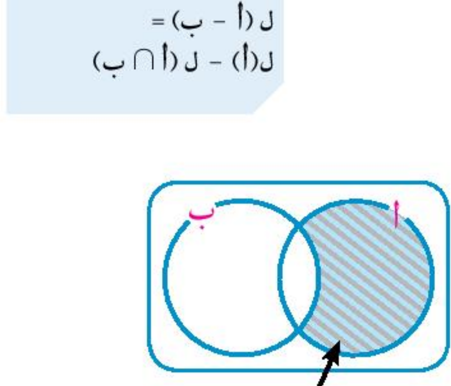
= $\frac{٠,٤٥ - ٠,٣٦}{٠,٤٥}$ = ٠,٢

تذكر أن

ل(ب ∩ أ) = ل(أ ∩ ب)

ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب)

ل (أ - ب) = ل(أ) - ل (أ ∩ ب)



حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٢٥ ، ل(أ - ب) = ٠,٤٥ أوجد:

أ) ل(أ | ب)
ب) ل(ب | أ)
جـ) ل(أَ | ب)
د) ل(أَ | بَ)

مثال

الجداول التوافقية

(١٦) من بيانات الجدول التالى:

الحالة	عدد الأشخاص	
	يلبس نظارة	لا يلبس نظارة
رجل	٨٠٠	٦٠٠
امرأة	٤٠٠	٢٠٠

أوجد احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة ؟

الحل

نفرض أن: ن(ف) = عدد الأشخاص موضوع الدراسة = ٢٠٠٠ ،

أ حدث أن الشخص المختار إمرأة

، ب حدث أن الشخص المختار يلبس نظارة

$$ل(أ \cap ب) = \frac{٤٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{١}{٥}$$

$$ل(ب) = \frac{١٢٠٠}{٢٠٠٠} = \frac{٣}{٥}$$

المطلوب هو: إيجاد احتمال أ علمًا بأن ب قد وقع أى: ل(أ | ب)

$$\because ل(أ \mid ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

$$\therefore ل(أ \mid ب) = \frac{١}{٥} \div \frac{٣}{٥} = \frac{١}{٣}$$

احتمال أن تكون امرأة اختيرت عشوائيًّا تلبس نظارة هو $\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق أوجد:

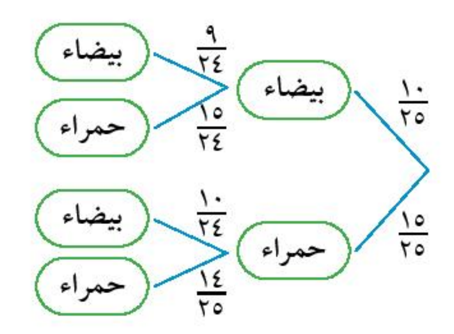
أ) أن يكون رجل اختير عشوائيًّا لا يلبس نظارة .

ب) أن يكون رجل أو امرأة اختير عشوائيًّا يلبس نظارة .

مثال — الشجرة البيانية

١٧ حقيبة بها ١٠ كرات بيضاء ، ١٥ كرة حمراء سحبت عشوائيًّا كرتان على التوالى دون إحلال (إرجاع) . ما احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين؟

الحل



نلاحظ فى هذا المثال أن سحب الكرات تم على التوالى ، لذلك فهو يخضع للترتيب، أى إن السحبة الثانية للكرة مشروط بحدوث السحبة الأولى.
يمكن تمثيل هذا المثال بمخطط الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل الجانبى.

نفرض أن: أ ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الأولى بيضاء

ب ترمز لـ حدث أن تكون الكرة الثانية بيضاء

(ب | أ) ترمز للحدث سحب الكرة الثانية بشرط أن تكون الكرة الأولى قد تم سحبها .

(أ ∩ ب) ترمز للحدث سحب كرتين بيضاوين.

$\because$ ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل(ب ∩ أ)}}{\text{ل(أ)}}$

$\therefore$ $\frac{٩}{٢٤}$ = $\frac{\text{(أ ∩ ب)}}{\frac{١٠}{٢٥}}$

$\therefore$ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٢٤} \times \frac{١٠}{٢٥} = \frac{٣}{٢٠}$

احتمال أن تكون الكرتان بيضاوين هو $\frac{٣}{٢٠}$

حاول أن تحل

٤ فى المثال السابق أوجد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟

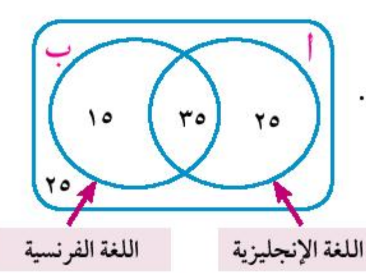
مثال — الربط بالتعليم

١٨ يدرس ١٠٠ طالب فى أحد المعاهد التعليمية لتدريس اللغات، فإذا كان عدد الدارسين للغة الإنجليزية ٦٠ طالبًا وعدد الدارسين للغة الفرنسية ٥٠ طالبًا وعدد الدارسين للغتين معًا ٣٥ طالبًا. اختير أحد الطلاب من هذا المعهد عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب دارسًا:

(أ) أحد اللغتين على الأقل.

(ب) اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

(جـ) اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية.



الحل

يمكن توضيح بيانات المسألة على شكل ڤن كما هو مبين فى الشكل المقابل.

وبفرض الأحداث الآتية:

الطالب يدرس اللغة الإنجليزية = أ

الطالب يدرس اللغة الفرنسية = ب فإن:

ل(أ) = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠,٦ ، ل(ب) = $\frac{٥٠}{١٠٠}$ = ٠,٥ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{٣٥}{١٠٠}$ = ٠,٣٥

(أ) احتمال أن يكون الطالب دارسًا أحد اللغتين على الأقل هو ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ + ٠,٥ – ٠,٣٥ = ٠,٧٥

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا احد اللغتين على الأقل هو ٠,٧٥

(ب) احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية = ل(أ | ب)

∵ ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ ∩ ب)}{ل(ب)}$

∴ ل(أ | ب) = $\frac{٠,٣٥}{٠,٥}$ = ٠,٧

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية هو ٠,٧

(جـ) احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية = ل(ب | أ)

∵ ل(ب | أ) = $\frac{ل(ب ∩ أ)}{ل(أ)}$

∴ ل(ب | أ) = $\frac{٠,٣٥}{٠,٦}$ ≃ ٠,٥٨٣

أى إن احتمال أن يكون الطالب دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الإنجليزية هو تقريبًا ٠,٥٨٣

حاول أن تحل

(٥) يصوب لاعبان أ ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف = $\frac{٢}{٥}$، واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{١}{٤}$، واحتمال أن يصيب اللاعبان أ ، ب معًا الهدف = $\frac{١}{٦}$، أوجد احتمال:

(أ) إصابة الهدف

(ب) إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب .

(جـ) إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ .

تمـــارين (٣ – ٢)

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين، احتمال ظهور كتابة فى الرمية الثانية إذا ظهرت صورة فى الرمية الأولى تساوى:

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور عدد زوجى أولى إذا ظهر عدد أكبر من ١ هو:

(أ) $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٥}$ (ج) $\frac{٣}{٥}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

(٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، احتمال ظهور العدد ٣ علمًا بأن العدد الظاهر فردى هو:

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٤) إذا كان ل(أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(أ) = $\frac{٤}{٥}$ فإن ل(ب | أ) =

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٨}{٢٥}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

(٥) إذا كان ل(أ | ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$ فإن ل(أ ∩ ب) =

(أ) $\frac{٤}{٢٥}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (ج) $\frac{٢٥}{٣٦}$ (د) $\frac{١٦}{٢٥}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٦) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث كان ل(أ) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٧ ، ل(أ | ب) = ٠,٣ أوجد:

(أ) ل(أ ∩ ب) (ب) ل(أ ∪ ب) (ج) ل(ب | أ) (د) ل(أ | ب′)

(٧) إذا كان ل(أ′) = ٠,٤ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ أوجد ل(أ | ب′)

(٨) إذا كان ل(ب | أ) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ب | أ′) = $\frac{٤}{٧}$ ، ل(أ) = $\frac{٣}{٥}$ أوجد

(أ) ل(أ ∩ ب) (ب) ل(أ ∪ ب)

(٩) أُلقِي حجر نرد مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عددًا أوليًّا بشرط أن يكون العدد الظاهر عددًا فرديًّا .

(١٠) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين مرة واحدة أوجد احتمال أن يكون:

(أ) العدد الظاهر على الحجر الثانى يساوى ٤، علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٢ .

(ب) مجموع العددين الظاهرين زوجيًّا علمًا بأن العدد الظاهر على الحجر الأول يساوى ٦.

(١١) إذا كان احتمال نجاح طالب فى امتحان هو ٠,٧ واحتمال سفره للخارج إذا نجح هو ٠,٦ فما احتمال نجاحه وسفره للخارج؟

(١٢) فصل دراسى به ٤٥ طالبًا منهم ٢٧ يدرسون اللغة الفرنسية ،١٥ يدرسون اللغة الألمانية ، ٩ يدرسون اللغتين معًا، اختير طالب من هذا الفصل عشوائيًّا ، احسب احتمال أن يدرس الطالب المختار:

(أ) مادة واحدة على الأقل من المادتين.

(ب) يكون دارسًا اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا اللغة الألمانية.

(جـ) يكون دارسًا اللغة الألمانية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

(١٣) أُلقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية:

(أ) ظهور العدد ٢ على الوجهين معا علمًا بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما.

(ب) ظهور العدد ٥ على الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤ .

(جـ) عدم ظهور العدد ٣ على أى من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

(١٤) **لعبة الدوارة:** رُقِّمت قطاعات دائرية متساوية من ١ إلى ٨ فى لعبة الدوارة . ما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد ٥ إذا عُلم انه أستقر عند عدد فردى؟



(١٥) يبين الجدول التالى أعداد الفرق الرياضية المشاركة فى الألعاب الرياضية المختلفة:

اللعبة الرياضية	كرة اليد	كرة القدم	الكرة الطائرة	كرة السلة	كرة الهوكى
عدد الفرق المشاركة	٤	١٠	٦	٧	٣

إذا اختيرت إحدى هذه الألعاب عشوائيًّا فما احتمال أن تكون من ألعاب:

(أ) كرة الهوكى علمًا بأنها ليست من ألعاب الكرة الطائرة .

(ب) كرة السلة علمًا بأنها ليست من ألعاب كرة القدم وليست من ألعاب كرة اليد .

(١٦) اختيرت عينة عشوائية مكونة من ٣٠ طالبًا و٢٠ طالبة للمشاركة فى الإجابة عن الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت إجاباتهم على النحو التالى:

الإجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	٢٠	٦	٤	٣٠
طالبات	١٥	٣	٢	٢٠

فإذا اختير أحد أفراد العينة عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون الشخص المختار "طالبة" إجابتها نعم؟

(١٧) صندوق يحتوى على ٥ كرات بيضاء ، ٧ كرات سوداء. سُحبت كُرتان منه على التوالى دون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد احتمال:

(أ) أن تكون الكرة الثانية بيضاء إذا كانت الكرة الأولى بيضاء.

(ب) أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية بيضاء.

(جـ) أن تكون الكرة الثانية سوداء و الكرة الأولى بيضاء.

١٨ يتنافس كريم وزياد فى الترشح لرئاسة اتحاد طلاب المدرسة ضمن ثلاثة صفوف دراسية، والجدول التالى يمثل الأصوات التى حصل عليها كل منهم:

	الصف الأول	الصف الثانى	الصف الثالث	المجموع
كريم	١٩٦	١٧٤	١٣٠	٥٠٠
زياد	٢٤٠	١٦٥	١٣٥	٥٤٠

فإذا اختير طالب من طلاب المدرسة عشوائيًّا فما احتمال أن يكون الطالب:

(أ) انتخب المرشح "كريم" علمًا بأنه من طلاب الصف الثالث؟

(ب) انتخب المرشح "زياد" علمًا بأنه من طلاب الصف الثانى ؟

١٩ أُعلن عن وظيفة تقدم لها ١٠٠ شخص، رُتبت بياناتهم كالآتى:

	مؤهلون		غير مؤهلين	
	متزوج	أعزب	متزوج	أعزب
ذكر	٤٠	١٠	٣	١٢
أنثى	١٠	١٠	١٠	٥

(أ) احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون مؤهلًا.

(ب) احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا ومؤهلًا.

(جـ) احسب احتمال أن يكون الموظف المختار متزوجًا بشرط أن يكون غير مؤهل.

٢٠ فى اختبار آخر العام وجد أن ٣٠٪ من الطلبة رسبوا فى الكيمياء، ٢٠٪ رسبوا فى الفيزياء ، ١٥ ٪ رسبوا فى الكيمياء والفيزياء. اختير أحد الطلبة عشوائيًّا.

(أ) إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الكيمياء، فما احتمال رسوبه فى الفيزياء؟

(ب) إذا كان الطالب المختار راسبًا فى الفيزياء، فما احتمال رسوبه فى الكيمياء؟

(جـ) أوجد احتمال رسوبه فى الكيمياء بشرط عدم رسوبه فى الفيزياء؟

(د) أوجد احتمال نجاحه فى الفيزياء بشرط نجاحه فى الكيمياء؟

٢١ **نشاط:** استخدام شكل ڤن:

أ ، ب حدثان في فضاء العينة ف حيث ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢

(أ) مَثِّل المجموعات السابقة بشكل ڤن واكتب على الرسم احتمالات وقوعها .

(ب) أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أولًا: وقوع الحدث أ بشرط عدم وقوع الحدث ب.

ثانيًا: وقوع الحدث ب بشرط عدم وقوع الحدث أ.

الأحداث المستقلة

Independent Events

سوف تتعلم

- الأحداث المستقلة.
- الأحداث غير المستقلة .

المصطلحات الأساسية

- الأحداث المستقلة Independent Events
- الأحداث غير المستقلة Dependent Events




تأمل الأمثلة الآتية:

١- إلقاء قطعة نقود وحجر نرد مرة واحدة.
٢- نجاح طالب في مقرر الرياضيات ونجاحه في مقرر الكيمياء.
٣- سُحبت كرة عشوائيًّا من كيس به ١٠ كرات ثم أعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية.
٤- نجاح طالب في الامتحان العملي للفيزياء ونجاحه في مقرر الفيزياء.
٥- سَحْبُ كرة عشوائيًّا من كيس به ١٠ كرات دون إعادتها، ثم سحب كرة ثانية.

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ من الأمثلة الثلاثة الأولى أن:

١- النواتج في قطعة النقود لا تؤثر في النواتج في حجر النرد .
٢- نجاح الطالب في الرياضيات أو رسوبه فيها لا يؤثر في نجاحه أو رسوبه في الكيمياء.
٣ - إعادة الكرة الأولى إلى الكيس بعد سحبها لا يغير من عدد الكرات، وبالتالي فإن السحبة الأولى لا تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى كل مثال من الأمثلة الثلاثة السابقة تُعرف بالأحداث المستقلة.

٤- نجاح الطالب فى الامتحان العملي للفيزياء يؤثر في نجاحه فى مقرر الفيزياء.
٥- عند سحب كرة من كيس دون إعادتها إليه يؤثر في عدد الكرات الموجودة فى الكيس، وبالتالى فإن السحبة الأولى تؤثر في السحبة الثانية.

لذلك فإن الأحداث فى المثالين (٤)، (٥) تعرف بالأحداث غير المستقلة



تعلم — الحدثان المستقلان

تعريف يقال إن الحدثين أ، ب مستقلان إذا وإذا فقط ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب).

أى إن احتمال وقوع حدثين مستقلين معًا يساوى احتمال وقوع الحدث الأول مضروبًا فى احتمال وقوع الحدث الثانى.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ويُلاحظ أنه إذا كان الحدثان أ ، ب مستقلين وكان ل(ب) $\neq$ صفر

فإن ل(أ | ب) = ل (أ) أى إن وقوع أحد الحدثين لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

فمثلًا: أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرتين ولوحظ تتابُع حدوث الصورة والكتابة ،

فإن: ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص) ، (ك، ك)}

لذا فإن احتمال أى من تلك النتائج = $\frac{١}{٤}$

بفرض أن الحدث أ يمثل ظهور الكتابة فى المرة الثانية = {(ص ، ك) ، (ك ، ك) }

والحدث ب يمثل ظهور الصورة فى المرة الأولى = {(ص ، ص) ، (ص ، ك)}

$$\text{فإن ل (أ | ب)} = \frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} = \text{ل (أ)}$$

أى إن حدوث الحدث ب لم يؤثر على احتمال حدوث الحدث أ بمعنى أن احتمال أ لا يعتمد على معلومية أن الحدث ب، قد وقع لذا نقول إن الحدثين أ ، ب مستقلان.

لاحظ أن: الحدثين المتنافيين أ ، ب يكونان مستقلين إذا و إذا فقط ل (أ) × ل (ب) = صفر بمعنى إذا و إذا فقط كان احتمال أ أو احتمال ب مساويًا صفر.

مثال

١ في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ثم إلقاء حجر نرد. ما احتمال ظهور صورة والعدد ٥؟

الحل

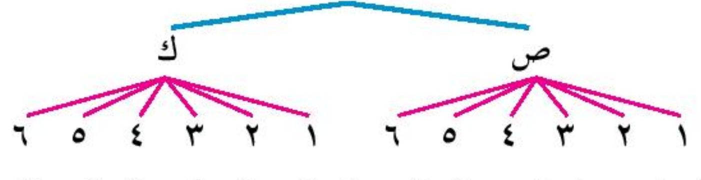
يمكن استخدام الشجرة البيانية لكتابة فضاء العينة: نلاحظ أن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج العينة لإلقاء حجر النرد ، لذلك فإن الحدثين مستقلان. وبفرض أن:

أ = حدث ظهور صورة. فإن ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ب = حدث ظهور العدد ٥. فإن ل(ب) = $\frac{١}{٦}$

$\because$ ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ) × ل (ب) $\therefore$ ل (أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٢}$

$\therefore$ احتمال ظهور صورة و العدد ٥ هو $\frac{١}{١٢}$

ملاحظة: يمكن إيجاد احتمال ظهور صورة والعدد ٥ مباشرة بكتابة فضاء العينة كما هو موضح بالشكل التالى:



ف = { (ص ، ١) ، (ص ، ٢) ، (ص ،٣) ، (ص ، ٤) ، (ص ، ٥) ، (ص ، ٦) ، (ك ، ١) ، (ك ، ٢) ، (ك ، ٣) ، (ك ، ٤)، (ك ، ٥) ، (ك ، ٦) }

حدث ظهور صورة والعدد ٥ = {(ص ، ٥)} ويكون احتمال ظهور صورة و العدد ٥ = $\frac{١}{١٢}$

حاول أن تحل

١ فى المثال السابق أوجد احتمال ظهور كتابة وعدد أولى؟

مثال

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٨ .
بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان؟

الحل

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∪ ب)
∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ – ٠,٨ = ٠,٣ (١)
∵ ل(أ)×ل(ب) = ٠,٥ × ٠,٦ = ٠,٣ (٢)
من (١) ، (٢) يكون أ ، ب حدثين مستقلين.

لاحظ أن: لإيضاح الفرق بين الحدثين المتنافيين والمستقلين نأخذ المثال التالى:
نعلم أنه عند إلقاء قطعة نقود معدنية منتظمة مرة واحدة فإن فضاء العينة ف = {ص، ك}
كما نعلم أن ل (ص) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ك) = $\frac{1}{2}$
ونعلم أيضًا أن الحدثين ص ، ك حدثان متنافيان لأن حدوث أحدهما ينفى حدوث الآخر .
∴ ل (ص ∩ ك) = صفر ، ∴ ل (ص ∩ ك) ≠ ل(ص) × ل (ك)
أى أنه ص ، ك حدثان متنافيان إلا أنهما غير مستقلين.

حاول أن تحل

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}
وكان أ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦} ، ب = {١ ، ٤ ، ٥ ، ٦} هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ وضح ذلك.

مثال

(٣) **الربط بالتأمين** أمَّنَ رجل وزوجته على حياتيهما في إحدى شركات التأمين على الحياة فإذا قدرت الشركة احتمال أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عامًا هو ٠,٢ واحتمال أن تعيش زوجته أكثر من نفس المدة ٠,٣ أوجد احتمال أن:

أ) يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا. ب) يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا.
جـ) يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا.

الحل

نفرض أن: أ حدث أن يعيش الرجل أكثر من ٢٠ عاماً ل(أ) = ٠,٢ ،
ب حدث أن تعيش الزوجة أكثر من ٢٠ عاماً ل(ب) = ٠,٣

أ) احتمال أن يعيش الرجل وزوجته معًا أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∩ ب)
∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل(ب) ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ × ٠,٣ = ٠,٠٦

ب) احتمال أن يعيش أحدهما على الأقل أكثر من ٢٠ عامًا = ل(أ ∪ ب)
∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) ∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٢ + ٠,٣ – ٠,٠٦ = ٠,٤٤

ج ∵ احتمال أن يعيش أحدهما فقط أكثر من ٢٠ عامًا = ل (أ ∪ ب) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب) = ٠,٤٤ - ٠,٠٦ = ٠,٣٨

حاول أن تحل

٣ **الربط بالرماية:** أطلق جنديان أ ، ب قذيفة نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب أ الهدف هو ٠,٦ وكان احتمال إصابة ب نفس الهدف ٠,٥ أوجد احتمالات الأحداث الآتية:

أ إصابة الهدف من الجندى أ والجندى ب معًا. ب إصابة الهدف بقذيفة واحدة على الأقل.

ج إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط. د عدم إصابة الهدف.

مثال

٤ **السحب مع الإحلال:** كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرة عشوائيًا ثم أُعيدت إلى الكيس، ثم سُحبت كرة ثانية، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين في المرتين؟ ب الكرتان زرقاوين في المرتين؟

ج الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟ د إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

الحل

أ طالما أن سحب الكرة مع الإحلال (الإرجاع) فيكون **الحدثان مستقلين**.

وبفرض أن: ف = فضاء العينة ، أ = سحب الكرة فى المرة الأولى ، ب = سحب الكرة فى المرة الثانية

∴ ن (ف) = ١٠ ، ل (أ) = $\frac{٤}{١٠}$ ، ل(ب) = $\frac{٤}{١٠}$ **(لأن السحب مع الاحلال)**

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب)   ∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٦}{١٠٠} = \frac{٤}{٢٥}$

بنفس الطريق السابقة يكون:

ب احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين في المرتين = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٣٦}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٥}$

ج احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء = $\frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} = \frac{٢٤}{١٠٠} = \frac{٦}{٢٥}$

د احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء = احتمال الأولى حمراء والثانية زرقاء + احتمال الأولى زرقاء والثانية حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠} \times \frac{٤}{١٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

حاول أن تحل

٤ إذا كان احتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم فى الدولة (أ) يساوى ٠,٨٤ واحتمال ارتفاع مؤشر سوق الأسهم فى الدولة (ب) يساوى ٠,٧٥ ما احتمال أن يرتفع مؤشر سوقى أسهم الدولتين أ ، ب؟

تعلم   الأحداث غير المستقلة *Dependent events*

يكون أ ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان: ل (أ ∩ ب) ≠ ل (أ) × ل (ب)

لأننا نعلم من تعريف الاحتمال الشرطى أن:

ل (أ | ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ بشرط ل (ب) ≠ ٠

، ل (ب | أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ بشرط ل (أ) ≠ ٠

أي إنه يمكن كتابة ل (أ ∩ ب) = ل (أ | ب) × ل (ب)

= ل (ب | أ) × ل (أ) بشرط أن ل (أ) ≠ ٠ ، ل (ب) ≠ ٠

بمعنى أن الحدثين أ ، ب يكونان غير مستقلين إذا كان احتمال حدوث أحدهما يؤثر بطريقة ما في احتمال حدوث الآخر.

احتمال الأحداث غير المستقلة

مثال

٥ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} وكان أ = {١ ، ٢ ، ٤ ، ٨}، ب = {٢ ، ٥ ، ٦ ، ٧} هل أ ، ب مستقلان؟ وضح إجابتك.

الحل

∵ ن(أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ، ∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ أ ∩ ب = {٢} ∴ ل(أ∩ب) = $\frac{١}{٨}$ (١)

∵ ل (أ) × ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$ (٢)

من (١) ، (٢) ل (أ ∩ ب) ≠ ل(أ) × ل(ب) لذلك فإن أ ، ب حدثان غير مستقلين.

حاول أن تحل

٥ إذا كان جـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} هل ب ، جـ مستقلان؟ وضح اجابتك.

السحب بدون إحلال

مثال

٦ كيس يحتوي على ٦ كرات زرقاء و ٤ كرات حمراء، إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان حمراوين؟ ب الكرتان زرقاوين؟ جـ الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

الحل

هذا المثال هو نفس مثال (٣) باختلاف أن سحب الكرات بدون إحلال (دون إرجاع) ، لذلك يكون الحدثان غير مستقلين.

أ إذا كانت الكرتان حمراوين فإن:

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء =

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء بعد سحب الكرة الحمراء الأولى

= $\frac{٤}{١٠}$ × $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{٢}{١٥}$

ب إذا كانت الكرتان زرقاوين فإن: احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء والثانية زرقاء = $\frac{٦}{١٠} \times \frac{٥}{٩} = \frac{١}{٣}$

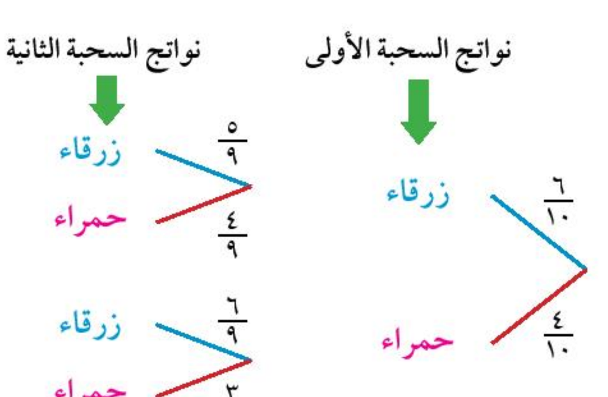
ج

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء =

احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء × احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء بشرط أن تكون الأولى حمراء

$= \frac{٤}{١٠} \times \frac{٦}{٩} = \frac{٤}{١٥}$

يمكن استخدام الشجرة البيانية كما هو موضح بالشكل لإيجاد نواتج الأحداث غير المستقلة.



حاول أن تحل

٦ كيس يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٥ كرات سوداء إذا سُحبت كرتان الواحدة وراء الأخرى دون إحلال (إرجاع) ، ما احتمال أن تكون:

أ الكرتان سوداوين؟ ب الأولى سوداء والثانية حمراء؟ ج إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟

تمارين ٣ - ٣

١ أى من الأحداث التالية مستقلة وأيها غير مستقلة؟ فسر إجابتك:

أ إلقاء قطعة نقود معدنية ، ثم إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

ب سحب بطاقة من صندوق بدون إحلال ، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

ج سحب بطاقة من صندوق مع الإحلال ، ثم سحب بطاقة أخرى من نفس الصندوق.

د تأهل فريق كرة القدم إلى دور الأربعة ، فإذا ربح فسوف يلعب فى مباراة البطولة.

هـ اختيار أحد الأسماء بالقرعة دون إحلال (إرجاع) ، ثم اختيار اسمًا آخر.

و اختيار كرة من كيس ووضعها فى مكان آخر، ثم اختيار كرة أخرى من نفس الكيس.

ز تقدم كريم فى المسابقة الثقافية يوم الاثنين ونجح فيها، وتقدم للمسابقة العلمية يوم الخميس ونجح فيها أيضا .

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٢ إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,١٢ ب ٠,٣٢ ج ٠,٦٨ د ٠,٨

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(أ – ب) =

أ) ٠,١ ب) ٠,١٥ ج) ٠,٣ د) ٠,٦٥

(٤) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = س ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٧٢ فإن س تساوى:

أ) ٠,٢٤ ب) ٠,٢٨ ج) ٠,٤ د) ٠,٦

(٥) إذا أُلقيت قطعة نقود ثم أُلقَي حجر نرد مرة واحدة. فما احتمال ظهور صورة والعدد ٣؟

(٦) إذا أُلقيت قطعة نقود أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

(٧) أُلقَي حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإذا كان أ حدث ظهور عدد زوجى ، ب حدث ظهور عدد مربع. هل أ ، ب حدثان مستقلان؟ فسر إجابتك.

(٨) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ أوجد قيمة ل (أ) إذا كان أ ، ب:

أ) حدثين متنافيين. ب) حدثين مستقلين .

(٩) يحتوي كيس على مجموعة من البلي موزعة على النحو التالي ٢ حمراء ، ٣ خضراء واحدة زرقاء. اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة مع الإحلال، ثم اختيرت بلية ثانية. اوجد احتمال إن تكون البليتان المختاران خضراوين؟

(١٠) **فى السؤال السابق**: إذا اختيرت عشوائيًّا بلية واحدة بدون إحلال ثم اختيرت بلية ثانية ، أوجد احتمال أن تكون الأولى زرقاء والثانية خضراء.

(١١) يحتوى كيس على الكرات التالية: ٦ حمراء ، ٤ برتقالية ، ٣ صفراء ، ٢ زرقاء و ٥ خضراء. اختيرت كرة عشوائيًّا بدون إحلال (إرجاع) ثم اختيرت كرة ثانية.

أوجد احتمال أن تكون الكرات المسحوبة:

أ) حمراء و زرقاء. ب) حمراء و صفراء. ج) حمراء و حمراء. د) برتقالية و زرقاء.

(١٢) يصوب جنديان أ ، ب طلقة واحدة نحو هدف ما ، فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو ٠,٤ واحتمال أن يصيب الجندى الثانى الهدف هو ٠,٧ .

أولًا: أوجد احتمال أن:

أ) يصيب الجنديان الهدف معًا. ب) يصيب أحدهما الهدف على الأقل.

ج) يصيب أحدهما فقط الهدف. د) يصيب أحدهما الهدف على الأكثر.

ثانيًا: إذا علمت أن أحدهما على الأقل أصاب الهدف، فأوجد احتمال أن يكون الجندى أ فقط قد أصاب الهدف.

(١٣) إذا كان أ، ب حدثان مستقلان فاثبت أن كل من أزواج الأحداث الآتية يكون أيضا مستقلا

أ) أ′ ، ب′ ب) أ′ ، ب ج) أ ، ب′

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

الوحدة
٤



مقدمة الوحدة

سبق أن درسنا التجربة العشوائية وبعض مفاهيم الاحتمالات، وفى كثير من الحالات نرغب فى التعامل مع قيم كمية (عددية) مرتبطة بنتائج للتجربة العشوائية والتى تكون فى بعض الحالات صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا، وفى هذه الحالة نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تُسمى بالمتغير العشوائى والتى تستخدم للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية، وسوف ندرس فى هذه الوحدة نوعين من المتغيرات العشوائية وهما:

- المتغيرات العشوائية المتقطعة Discrete Random Variables
- المتغيرات العشوائية المتصلة Continuous Random Variables

كما سندرس كذلك دوال التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية والتى تنقسم إلى:

- دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Probability Distribution Function of Discrete Random Variable
- دالة التوزيعات الاحتمالية المتصلة (دوال الكثافة) Probability Density Function



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وبعد تنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف مفهوم المتغير العشوائى، ويُميز بين المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل) والمتصل.
- يتعرف مفهوم دالة الكثافة لمتغير عشوائى متصل ويعرف خواصها ويستخدمها فى حساب احتمال وقوع قيمة المتغير العشوائى داخل فترة معينة.
- يتعرف مفهوم المتوسط (التوقع) والتباين.
- يستنتج الانحراف المعيارى لمتغير عشوائى.
- يعين معامل الاختلاف.
- يتعرف التوزيعات المتصلة.


المصطلحات الأساسية
المتغير العشوائى Random Variable
التوزيعات الاحتمالية Probability Distributions
معامل الاختلاف Coefficient of Variation
المتغير العشوائى المتقطع Discrete Random Variable
التوقع (المتوسط) Expectation(Mean)
كثافة احتمالية Probability Density
التباين Variance
دروس الوحدة
الدرس (١ - ١): المتغير العشوائى المتقطع.
الدرس (١ - ٢): التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع.
الدرس (١ - ٣): دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل
الأدوات والوسائل
الة حاسبة علمية
مخطط تنظيمى للوحدة
المتغير العشوائى والتوزيع الاحتمالى
متقطع (منفصل)
متصل (مستمر)
التوقع (المتوسط)
التباين
الانحراف المعيارى
معامل الاختلاف
دالة الكثافة الاحتمالية
خواصها
استخداماتها
تطبيقات حياتية

المتغير العشوائي المتقطع

Random Variable

سوف تتعلم

- المتغير العشوائى
- المتغير العشوائى المتقطع
- المتغير العشوائى المتصل
- التوزيعات الاحتمالية

المصطلحات الأساسية

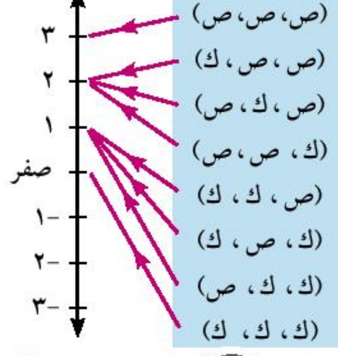
- المتغير العشوائى *Random Variable*
- المتغير العشوائى المستمر *Continuous Random Variable*
- المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*
- التوزيعات الاحتمالية *Probability Distributions*

مقدمة: سبق أن درست التجربة العشوائية، وأمكنك إيجاد فضاء العينة لها، وفى هذا الدرس سوف نتعرف متغيرًا جديدًا مرتبطًا بهذه التجربة العشوائية وهو المتغير العشوائى.

وسوف ندرس فى هذا الدرس كيفية وصف مفردات ظاهرتين مختلفتين من حيث العلاقة بينهما.

المتغير العشوائى:

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن فضاء العينة ف يتحدد كما فى الشكل المقابل. فإذا طُلب فى هذه التجربة إيجاد «عدد الصور» التى تظهر فى فضاء العينة ف فإننا نرسم مخططًا يظهر العلاقة بين ف (كمتغير مستقل)، وعدد الصور وهو عدد حقيقى ح «كمتغير تابع» وهذه العلاقة تعبر عن دالة، وتكتب رمزيًّا كالآتى: سـ : ف ← ح حيث سـ يرمز إلى المتغير العشوائى.



تعريف: **المتغير العشوائى هو دالة مجالها مجموعة عناصر فضاء العينة ف ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ح.**

تذكر أن

تتحدد الدالة بالآتى:
- المجال
- المجال المقابل
- قاعدة الدالة

مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال في المجال المقابل

ويكون مدى المتغير العشوائى سـ فى المثال السابق = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

لاحظ أن: المتغير العشوائى يجزئ فضاء العينة ف إلى أحداث متنافية، كل حدث منها يرتبط بعدد حقيقى، وهذا الارتباط يُعبر عن دالة سـ من فضاء العينة ف إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

المتغير العشوائى المتقطع *Discrete Random Variable*

تعريف: **المتغير العشوائى المتقطع (المنفصل أو الوثاب): مداه مجموعة محدودة (منتهية) أى قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.**

ومن أمثلة ذلك:

- عدد الأسهم المخصصة لأحد الأفراد فى اكتتاب شركة مساهمة.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

- عدد الحوادث على إحدى الطرق السريعة خلال أسبوع.
- عدد المكالمات التليفونية الصادرة لأسرة خلال شهر.

مثال

المتغير العشوائى المتقطع

(١) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائى س يعبر عن « عدد الصور - عدد الكتابات » اكتب مدى المتغير العشوائى.

الحل

ف = {(ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ،
(ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

فضاء العينة ف	س: عدد الصور - عدد الكتابات
(ص ، ص ، ص)	٣ - ٠ = ٣
(ص ، ص ، ك)	٢ - ١ = ١
(ص ، ك ، ص)	٢ - ١ = ١
(ص ، ك ، ك)	١ - ٢ = -١
(ك ، ص ، ص)	٢ - ١ = ١
(ك ، ص ، ك)	١ - ٢ = -١
(ك ، ك ، ص)	١ - ٢ = -١
(ك ، ك ، ك)	٠ - ٣ = -٣

مدى المتغير العشوائى = {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

حاول أن تحل

(١) فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن: عدد الصور × عدد الكتابات.

مثال

المتغير العشوائى المتقطع

(٢) أُلقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ، أوجد المتغير العشوائى الذى يعبر عن مجموع العددين الظاهرين.

الحل

فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(١ ، ١)	٢
(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)	٣
(٣ ، ١)، (٢ ، ٢)، (١ ، ٣)	٤
(٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٤)	٥
(٥ ، ١)، (٤ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٢ ، ٤)، (١ ، ٥)	٦

فضاء العينة ف	س : مجموع العددين
(٦ ، ١)، (٥ ، ٢)، (٤ ، ٣)، (٣ ، ٤)، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٦)	٧
(٦ ، ٢)، (٥ ، ٣)، (٤ ، ٤)، (٣ ، ٥)، (٢ ، ٦)	٨
(٦ ، ٣)، (٥ ، ٤)، (٤ ، ٥)، (٣ ، ٦)	٩
(٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٤ ، ٦)	١٠
(٦ ، ٥) ، (٥ ، ٦)	١١
(٦ ، ٦)	١٢

من الجدول السابق نجد أن مدى المتغير العشوائى

سـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢}

يمكن استخدام الشكل الجانبى لإيجاد مدى المتغير العشوائى سـ.

حاول أن تحل

(٢) فى المثال السابق أوجد مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن: «أكبر العددين الظاهرين».

التوزيعات الاحتمالية

دالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة *Probability Distribution Function of Discrete Random Variable*



إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه المجموعة: {$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ...... ، $س_{ر}$} فإن الدالة د المعرفة كالآتى: د($س_{ر}$) = ل (سـ = $س_{ر}$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......
تحدد ما يسمى بدالة التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للمتغير العشوائى سـ والذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د .

أى أن التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ = {($س_{١}$ ، د($س_{١}$)) ، ($س_{٢}$ ، د($س_{٢}$)) ، ($س_{٣}$ ، د($س_{٣}$)) ، .... ، ($س_{ن}$ ، د($س_{ن}$))}

ملاحظة: يمكن كتابة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ فى صورة جدول كالآتى:

$س_{ر}$	$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	......	$س_{ن}$
د($س_{ر}$)	د($س_{١}$)	د($س_{٢}$)	د($س_{٣}$)	......	د($س_{ن}$)

ويلاحظ أن الدالة د فى التعريف السابق تحقق الشرطين الآتيين.

١- د($س_{ر}$) $\geqslant$ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ...... ، ن

٢- د($س_{١}$) + د($س_{٢}$) + د($س_{٣}$) + ... + د($س_{ر}$) = ١

مثال

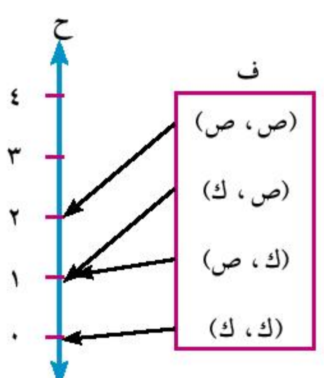
دالة التوزيع الاحتمالى

(٣) أُلقيت قطعة نقود مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه الظاهر ، اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن عدد مرات ظهور الصورة.

الحل

ف = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

نجد من الشكل الجانبى أن مدى المتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد ظهور صورة = {٠ ، ١ ، ٢}



د(٠) = ل(سـ = ٠) = $\frac{ن(سـ_{١})}{ن(ف)}$ = $\frac{١}{٤}$

$د(١) = ل(س = ١) = \frac{ن(س_٢)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٤}$ ، $د(٢) = ل(س = ٢) = \frac{ن(س_٣)}{ن(ف)} = \frac{١}{٤}$

وتكون دالة التوزيع الاحتمالى هى:

$س_ر$	٠	١	٢
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(٣) فى المثال السابق اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س الذى يعبر عن:(عدد مرات ظهور الصورة – عدد مرات ظهور الكتابة).

مثال

السحب دون إحلال

(٤) صندوق به ٥ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ ، سُحبت منه بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالى لكل من المتغير العشوائي الذى يعبر عن أصغر العددين على البطاقتين المسحوبتين.

الحل

طالما أن سحب البطاقات يتم بدون إرجاعها إلى الصندوق ، فإن البطاقة التى تسحب لا تتكرر ثانية، بمعنى أن أزواج البطاقات التى تحمل الأرقام (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) لا تكون ضمن فضاء العينة كما هو موضح بالشكل المقابل.

ن(ف) = ٢٠

من الشكل المقابل نجد أن مدى المتغير العشوائى س هو:

س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وأن:

$د(١) = ل(س = ١) = \frac{٨}{٢٠}$

$د(٢) = ل(س = ٢) = \frac{٦}{٢٠}$

$د(٣) = ل(س = ٣) = \frac{٤}{٢٠}$

$د(٤) = ل(س = ٤) = \frac{٢}{٢٠}$

دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س يعطى كما بالجدول الآتى:

$س_ر$	١	٢	٣	٤
$د(س_ر)$	$\frac{٨}{٢٠}$	$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$

حاول أن تحل

(٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى الذى يعبر عن أكبر العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

مثال

استخدام قاعدة الدالة

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{ك + ٢ س}{٢٤}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ فأوجد قيمة ك ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.

الحل

∵ د(٠) = ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤}$ ، د(١) = ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ ،

د(٢) = ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ ، د(٣) = ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤}$

∵ ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = ١

∴ $\frac{ك}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ + $\frac{ك + ٦}{٢٤}$ = ١

∴ $\frac{ك + ك + ٢ + ك + ٤ + ك + ٦}{٢٤}$ = ١ ∴ ٤ ك + ١٢ = ٢٤

∴ ٤ ك = ٢٤ − ١٢ ∴ ٤ ك = ١٢ ∴ ك = ٣

لإيجاد دالة التوزيع الاحتمالى نوجد:

ل(س = ٠) = $\frac{ك}{٢٤}$ = $\frac{٣}{٢٤}$ ، ل(س = ١) = $\frac{ك + ٢}{٢٤}$ = $\frac{٥}{٢٤}$

ل(س = ٢) = $\frac{ك + ٤}{٢٤}$ = $\frac{٧}{٢٤}$ ، ل(س = ٣) = $\frac{ك + ٦}{٢٤}$ = $\frac{٩}{٢٤}$

∴ دالة التوزيع الاحتمالى هى:

$س_ر$	٠	١	٢	٣
د($س_ر$)	$\frac{٣}{٢٤}$	$\frac{٥}{٢٤}$	$\frac{٧}{٢٤}$	$\frac{٩}{٢٤}$

حاول أن تحل

٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه = {١ ، ٢ ، ٣} ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة د(س) = $\frac{أ س}{٩}$

أوجد قيمة أ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى.

تمـــارين ٤ - ١

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) أيٌّ من الدوال الآتية تمثل دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س:

(أ)

سر	١	٢	٣	٤
د(سر)	٠,٠٦	٠,١٥	٠,٤٢	٠,٢٦

(ب)

سر	٠	١	٣	٥
د(سر)	٠,٥	٠,٣	٠,٤	٠,٢-

(ج)

سر	٢-	١-	١	٢
د(سر)	٠,٣٢	٠,١٤	٠,٢٣	٠,٣١

(د)

سر	٣	٤	٥	٦
د(سر)	٠,٢٣	٠,٣٢	٠,١٧	٠,١٨

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه { ٠ ، ١ ، ٢ } ، فإن جميع الدوال الآتية لا تمثل دالة التوزيع الاحتمالى له ماعدا الدالة:

(أ) د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}+١}{٨}$ (ب) د(س) = $\frac{٢\text{س}+١}{٣}$ (ج) د(س) = $\frac{١}{\text{س}+٢}$ (د) د(س) = $\frac{٣\text{س}-١}{٦}$

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، ٣} وكان ل(س = ١) = ٠,٣ ، ل(س = ٢) = ٠,٥ فإن ل(س = ٣) تساوى:

(أ) ٠,١   (ب) ٠,٢   (ج) ٠,٧   (د) ٠,٨

(٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه {١ ، ٢ ، - ١ ، ٠ } وكان ل(س = - ١) = ٠,٢ ، ل(س = ٠) = ٠,٤ ، ل(س = ١) = ٠,١ فإن ل(س > ١) تساوى::

(أ) ٠,٣   (ب) ٠,٤   (ج) ٠,٥   (د) ٠,٦

(٥) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وكان س هو المتغير العشوائى الذى يعبر عن:
«عدد الصور - عدد الكتابات» فإن مدى س هو:

(أ) {١ ، ٣}   (ب) {٠ ، ١ ، ٣}   (ج) {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}   (د) {-٣ ، -١ ، ١ ، ٣}

(٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = {٠ ، ١ ، ٢} ودالة توزيعه الاحتمالى تتحدد بالعلاقة:
د(س) = $\frac{\text{أ س}}{٦}$ فإن قيمة أ تساوى:

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١   (ج) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) الجدولان الأتيان يبينان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س ، أوجد قيمة أ فى كل جدول:

(أ)

سر	١	٢	٢	٣
د(سر)	أ	٢أ	٢أ	٣أ

(ب)

سر	٢-	١-	٠	١	٢
د(سر)	أ	٠,٢	٠,٣	٣أ	أ

(ج)

سر	٠	١	٣	٤
د(سر)	أ	٢$\text{أ}^{٢}$	٣$\text{أ}^{٢}$	٣أ

(٨) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت قيم ل (سـ = ٠) = ٠,٢ ، ل (سـ = ١) = ٠,٣٣ ، ل (سـ = ٢) = ٠,٣٧ فأوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

(٩) إذا كانت قيم المتغير العشوائى سـ فى تجربة عشوائية هى: -٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ باحتمالات قدرها $\frac{م}{٥}$ ، $\frac{م + ١}{٥}$ ، $\frac{٢م - ١}{٥}$ ، $\frac{٣م - ٢}{٥}$ على الترتيب فأوجد قيمة م ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ .

(١٠) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى يتحدد بالعلاقة:

د(س) = $\frac{أ٢ + ٣س}{٥٤}$ ومدى سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } أوجد قيمة أ واكتب دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ.

(١١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{ك + ٣س}{٥٠}$:
حيث س = ١ ، ٢ ، ٣، ٤ فأوجد قيمة ك، ثم اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

(١٢) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائى سـ يعبر عن « عدد الصور – عدد الكتابات » فاكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير سـ

(١٣) صندوقان بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ٣ إلى ٥ سحبت كرة عشوائيًّا من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى سـ بأنه « مجموع العددين » الموجودين على الكرتين المسحوبتين. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ.

(١٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « أصغر العددين الظاهرين ».

(١٥) صندوق به ٤ كرات مرقمة من ١ الى ٤ ، سحبت منه كرتان واحدة بعد الأخرى (مع الإحلال) ، اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن « المتوسط للرقمين على الكرتين المسحوبتين ».

(١٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يعبر عن عدد البنات فى أسرة لديها ثلاثة أطفال ، اكتب مدى المتغير العشوائى سـ ، وإذا فرضنا أن احتمال إنجاب ولد يساوى احتمال إنجاب بنت بفرض عدم وجود توأم. أوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ « يراعى ترتيب الأولاد والبنات ».

التوقع(الوسط) والتباين للمتغير العشوائى المتقطع

Expectation and Variance of a Discrete Random Variable

سوف تتعلم

- التوقع (المتوسط)
- التباين
- الانحراف المعيارى
- معامل الاختلاف

المصطلحات الأساسية

- التوقع (المتوسط) *Expectation(Mean)*
- التباين *Variance*
- معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

مقدمة: لتحديد صفات التوزيع الاحتمالى (أى تحديد صفات المجتمع الأصلى أو للمقارنة بين المجتمعات المختلفة) فإنه يلزمنا بعض المعالم الأساسية لقياس القيمة المتوسطة لها وهى القيمة التى تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائى وتعرف بالتوقع (المتوسط) ، وهناك أيضًا قيم أخرى تقيس تشتت قيم المتغير العشوائى عن قيمة المتوسط تعرف بالتباين ، لذلك فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية.

التوقع (المتوسط): *Expectation (Mean)*

التوقع هو القيمة التى تتمركز عندها معظم قيم المتغير العشوائى ويسمى أحيانًا « المتوسط » ويرمز له بالرمز (μ) ويقرأ (ميو).

فإذا كان سـ متغير عشوائيًّا متقطعًا دالة التوزيع الاحتمالى له هى د ومداه هو:{$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$} باحتمالات $د(س_١)$ ، $د(س_٢)$ ، $د(س_٣)$ ، .... ، $د(س_ن)$ على الترتيب فإن التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\text{التوقع } (\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر)$$

أى أن: التوقع (μ) = $س_١ \times د(س_١) + س_٢ \times د(س_٢) + س_٣ \times د(س_٣) + ... + س_ن \times د(س_ن)$

مثال

(١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

$س_ر$	١-	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	٠,٣	٠,١	٠,١	أ	٠,٢

أولًا: أوجد قيمة أ **ثانيًا:** أوجد التوقع (المتوسط)

الحل

أولًا: نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوى الواحد الصحيح

∵ ل(سـ = - ١) + ل(سـ = ٠) + ل(سـ = ١) + ل(سـ = ٢) + ل(سـ = ٣) = ١

∴ ٠,٣ + ٠,١ + ٠,١ + أ + ٠,٢ = ١

∴ أ + ٠,٧ = ١ ∴ أ = ١ - ٠,٧ = ٠,٣

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ثانيًا:

$\because$ التوقع $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = -١ × ٠,٣ + ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ٣ × ٠,٢

= -٠,٣ + ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٦ = ١

حاول أن تحل

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا مداه = {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} وكان:

ل(س = ٠) = ل (س = ٤) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (س = ١) = ل (س = ٣) = $\frac{١}{٤}$

أوجد: **أولًا**: ل (س = ٢) **ثانيًا**: التوقع

مثال

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى كالآتى:

س$_ر$	٠	١	٢	ب	٦
د(س$_ر$)	٠,١	٠,١	٠,٣	أ	٠,٣

احسب قيمة أ ، ب إذا كان التوقع μ = ٣,٥

الحل

من خواص التوزيع الاحتمالى: د(٠) + د(١) + د(٢) + د(ب) + د(٦) = ١

$\therefore$ ٠,١ + ٠,١ + ٠,٣ + أ + ٠,٣ = ١ $\therefore$ أ = ١ - ٠,٨ **أ = ٠,٢**

$\because$ التوقع $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × د(س$_ر$) = ٣,٥

$\therefore$ ٠ × ٠,١ + ١ × ٠,١ + ٢ × ٠,٣ + ب × ٠,٢ + ٦ × ٠,٣ = ٣,٥

$\therefore$ ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٢ ب + ١,٨ = ٣,٥ $\therefore$ ٠,٢ ب = ٣,٥ - ٢,٥

$\therefore$ ب = ١ ÷ ٠,٢ = ٥ **ب = ٥**

حاول أن تحل

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

س$_ر$	٠	٢	٣	٤
د(س$_ر$)	$\frac{٣}{١٦}$	٢ ل	$\frac{١}{١٦}$	ل

أولًا: أوجد قيمة ل **ثانيًا**: أوجد التوقع

التباين: *Variance*

التباين لمتغير عشوائى متقطع س يقيس مقدار التشتت للمتغير العشوائى عن قيمته المتوقعة، ويرمز له بالرمز (σ^2) ويقرأ (سيجما تربيع) ويعطى بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$$

ملاحظة: الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى سـ هو الجذر التربيعى للتباين و يرمز له بالرمز σ ، ويلاحظ أن التباين والانحراف المعيارى كميات موجبة دائمًا.

مثال

(٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا ودالة توزيعه الاحتمالى هى $د(س) = \frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = -٢ ، م ، ١ ، ٢ فأوجد قيمة م ثم أوجد المتوسط والتباين للمتغير العشوائى سـ .

الحل

من خواص دالة التوزيع الاحتمالى:

$\because$ ل(س = - ٢) + ل(س = م) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) = ١

$\therefore \frac{٢}{١٦} + \frac{م + ٤}{١٦} + \frac{٥}{١٦} + \frac{٦}{١٦} = ١$

$\therefore \frac{١٧ + م}{١٦} = ١$ $\therefore$ ١٧ + م = ١٦ $\therefore$ م = -١

سر	د(سر)	سر • د(سر)	$س_ر^٢$ • د(سر)
-٢	$\frac{٢}{١٦}$	$\frac{-٤}{١٦}$	$\frac{٨}{١٦}$
-١	$\frac{٣}{١٦}$	$\frac{-٣}{١٦}$	$\frac{٣}{١٦}$
١	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$	$\frac{٥}{١٦}$
٢	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{١٢}{١٦}$	$\frac{٢٤}{١٦}$
		$\frac{٥}{٨}$	$\frac{٥}{٢}$

التوقع $(\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر) = \frac{٥}{٨}$

التباين $(\sigma^٢) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \times د(س_ر) - \mu^٢ = \frac{٥}{٢} - (\frac{٥}{٨})^٢ = \frac{١٣٥}{٦٤}$

حاول أن تحل

(٣) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يتحدد بالدالة $د(س) = \frac{أ}{س + ١}$

حيث سـ = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ أوجد: **أولًا**: قيمة أ **ثانيًا**: التوقع والانحراف المعيارى للمتغير العشوائي سـ.

معامل الاختلاف: *Coefficient of Variation*

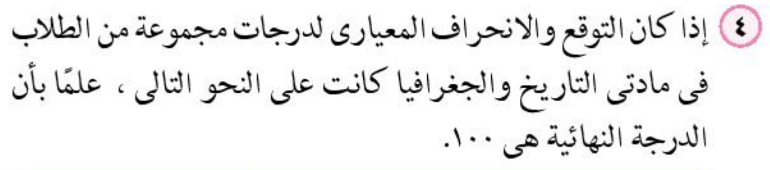
عند دراستنا للانحرف المعيارى كمقياس لتشتت قيم المتغير العشوائى عن توقعه علمنا بأنه يقاس بنفس وحدات المتغير موضوع البحث سواء كانت هذه الوحدات درجات أو أمتار أو كجم .. إلخ أى أنه يصلح أيضًا فى مقارنة مجموعتين لهما نفس الوحدات ونفس المتوسطات. أما إذا اختلفت الوحدات أو المتوسطات بين المجموعتين فإنه يتعذر استخدام الانحراف المعيارى كمقياس للمقارنة ومن هنا نشأت الحاجة إلى مقياس نسبى للتشتت يخلصنا من هذه الوحدات المختلفة ويمثل معامل الاختلاف حلًا مناسبًا لهذه المشكلة .

يعرف معامل الاختلاف لأى مجموعة من المفردات بأنه النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى للمجموعة والتوقع (المتوسط) لها و يتحدد كما فى العلاقة الآتية:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \% = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠ \%$$

وهذا المعامل يصور تشتت المجموعة فى صورة نسبة مئوية مجردة من التمييز بحيث لا تتأثر بالوحدات المقيسة بها الظاهرة.

مثال



٤ إذا كان التوقع والانحراف المعيارى لدرجات مجموعة من الطلاب فى مادتى التاريخ والجغرافيا كانت على النحو التالى ، علمًا بأن الدرجة النهائية هى ١٠٠.



المقاييس	امتحان التاريخ	امتحان الجغرافيا
التوقع	٧٠	٩٦
الانحراف المعيارى	٧	٨

أوجد معامل الاختلاف لكل مادة – ماذا تلاحظ ؟

الحل

∵ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \%$

∴ معامل الاختلاف لمادة التاريخ = $\frac{٧}{٧٠} \times ١٠٠ \% = ١٠ \%$ ،

معامل الاختلاف لمادة الجغرافيا = $\frac{٨}{٩٦} \times ١٠٠ \% \simeq ٨{,}٣ \%$

نلاحظ من الحل: أن التشتت النسبى لامتحان مادة التاريخ أكبر من التشتت النسبى لامتحان مادة الجغرافيا، وهذا معناه أن امتحان مادة الجغرافيا أكثر تجانسًا من امتحان مادة التاريخ.

حاول أن تحل

٤ إذا كان أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح أ ، ب وكان متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠، ١٥٨٠ وانحرافهما المعيارى بالساعة ٢٥٠ ، ٢٣٠ على الترتيب اوجد معامل الاختلاف لكل نوع - ماذا تلاحظ؟.

مثال

٥ كيس به ٦ بطاقات، منها بطاقتان تحملان العدد ٢ وثلاث بطاقات تحملان العدد٣ وبطاقة تحمل العدد ١١ ، فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائية وعرف المتغير العشوائى س بأنه «العدد الظاهر على البطاقة المسحوبة».

أوجد:

(أ) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير س.

(ب) التوقع والانحراف المعيارى للمتغير س (جـ) معامل الاختلاف.

الحل

(أ) س تأخذ القيم ٢ ، ٣ ، ١١ حيث: د(٢) = ل (س = ٢) = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

د(٣) = ل (س = ٣) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ، د (١١) = ل(س = ١١) = $\frac{١}{٦}$

والجدول التالى يبين دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائي س.

$س_ر$	٢	٣	١١
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٦}$

ولحساب التوقع والانحراف المعيارى نكون الجدول التالى:

$س_ر$	$د(س_ر)$	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^٢ \cdot د(س_ر)$
٢	$\frac{٢}{٦}$	$\frac{٤}{٦}$	$\frac{٨}{٦}$
٣	$\frac{٣}{٦}$	$\frac{٩}{٦}$	$\frac{٢٧}{٦}$
١١	$\frac{١}{٦}$	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{١٢١}{٦}$
المجموع		٤	٢٦

(ب) التوقع $(\mu) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر \times د(س_ر) = ٤$

التباين $(\sigma^٢) = \sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ \times د(س_ر) - \mu^٢ = ٢٦ - (٤)^٢ = ١٠$

الانحراف المعيارى $\sigma = \sqrt{١٠} = ٣,١٦$

(جـ) ∵ معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{المتوسط}} \times ١٠٠ \%$

∴ معامل الاختلاف = $\frac{٣,١٦}{٤} \times ١٠٠ \% = ٧٩ \%$

حاول أن تحل

(٥) كيس يحتوى على ١٠ بطاقات واحدة تحمل الرقم ١ ، بطاقتان تحمل كل منهما الرقم ٢ ، ثلاث بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٣ ،ر أربع بطاقات تحمل كل منهما الرقم ٤ ، فإذا سحب من الكيس عشوائيًّا إحدى هذه البطاقات وكان المتغير العشوائى س يعبر عن العدد على البطاقة المسحوبة فأوجد دالة التوزيع الاحتمالى لهذا المتغير واحسب كلًّا من التوقع وانحرافه المعيارى ومعامل الاختلاف.



تمارين ٤ – ٢

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س هو {(٠ ، ٠,٢٥) ، (١ ، ٠,٥) ، (٢ ، ٠,٢٥)} فإن التوقع يساوي:

أ) ٠,٥ ب) ١ جـ) ١,٢٥ د) ١,٥

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوي ٠,٦ ، $\sum_{ر=1}^{ن}$ سر² × د(سر) = ٤,٣٦ فإن الانحراف المعياري له يساوي:

أ) ١,٩٤ ب) ٢ جـ) ٣,٧٦ د) ٤

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا وكان التوقع يساوي ٠,٤ ، $\sum$ سر² × د(سر) = ٦,١٦ فإن التباين له يساوي:

أ) ٢,٤ ب) ٥,٧٦ جـ) ٦ د) ٦,٥٦

ثانيًا: أوجد التوقع والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي لكل مما يأتي:

(٤)

سر	٢	٣	٩
د(سر)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(٥)

سر	−٥	−٤	١	٢
د(سر)	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

(٦)

سر	−٣	−١	٠	١	٢	٣
د(سر)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

ثالثًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

سر	١	٢	٤	٦
د(سر)	٠,٢	٠,٣	أ	٠,١

أولًا: أوجد قيمة أ ثانيًا: أوجد المتوسط والانحراف المعياري

(٨) إذا كان مدى المتغير العشوائي س هو {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}،
ل(س =١) = $\frac{4}{25}$ ، ل(س = ٢) = $\frac{7}{25}$ ، ل(س = ٤) = $\frac{1}{5}$ فاحسب توقع وتباين س.

(٩) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ل(س =٠) = ل(س = ٤) = $\frac{1}{16}$ ،
ل(س = ١) = ل(س = ٣) = $\frac{1}{4}$ أوجد: أولًا : ل (س= ٢) ثانيًا: المتوسط والتباين للمتغير س.

(١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا دالة توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي ، حيث ٠ < ح < ١

سر	−٣	صفر	٣	٦
د(سر)	ح	ح²	٢ح²	ح

فأوجد: (أ) قيمة ح

(ب) التوزيع الاحتمالى للمتغير س.　　　(جـ) المتوسط والتباين للمتغير س.

(١١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى مبينًا بالجدول الآتى:

$س_ر$	١	٢	٤	أ
$د(س_ر)$	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

احسب قيمة أ إذا كان التوقع μ = ٣ ثم أوجد الانحراف المعيارى للمتغير العشوائى س.

(١٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى لمتغير عشوائى متقطع س يحدد بالدالة د حيث: $د(س) = \frac{أس}{٩}$ ، حيث س = ١، ٢، ٣

أوجد: (أ) قيمة أ　　　(ب) احسب التوقع والتباين للمتغير س.

(١٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا وتوزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة: $د(س) = \frac{س^٢ + ١}{أ}$ حيث س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

أوجد: (أ) قيمة أ　　　(ب) احسب معامل الاختلاف للمتغير س.

(١٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة: $د(س) = \frac{س + ٤}{١٦}$ حيث س = - ٢، م، ١، ٢

فأوجد: (أ) قيمة م　　　(ب) المتوسط والتباين للمتغير س.

(١٥) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا توزيعه الاحتمالى يحدد بالدالة د حيث:

$د(س) = \frac{أ}{س + ٣}$ ، س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

(أ) أوجد قيمة أ　　　(ب) أوجد التوقع والتباين.

(١٦) إذا كان مدى المتغير العشوائى س هو {-١ ، ٠ ، ٢} وكان ل(س = -١) = $\frac{١}{٤}$ وكان التوقع يساوى ١ فأوجد:

(أ) ل(س = ٠) ، ل (س = ٢)　　　(ب) أوجد معامل الاختلاف.

(١٧) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متوسطه μ = ٣ وتوزيعه الاحتمالى كالآتى:

$س_ر$	٠	٢	ك	٤
$د(س_ر)$	١	٢أ	$\frac{١}{٤}$	٥أ

(أ) احسب قيمة أ ، ك

(ب) أوجد الانحراف المعيارى للمتغير س.

التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدَّين

Geometric and Binomial Distributions

سوف تتعلم

- التجربة الاحتمالية الهندسية
- التوقع والتباين والانحراف المعيارى للتوزيع الهندسي.
- توزيع ذي الحدين.
- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائى ذي الحدين.

المصطلحات الأساسية

- تجربة بيرنولي
- التجربة الاحتمالية الهندسية
- التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين

تجربة بيرنولي *Bernoulli trial*

هى تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبَّر عن أحدهما بالنجاح، ويُعبَّر عن الآخر بالفشل.

فمثلًا، تجربة إلقاء قطعة النقود مَرَّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثِّل تجربة بيرنولي؛ لأنَّ لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعَدُّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس

مثال اخر: عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقَّمة بالأرقام: {١ ، ٢ ، ٣ ،٤ ، ٥ ، ٦} يُمكِن اعتبار هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أنَّ ظهور عدد أكبر من ٣ (مثلا) هو النجاح، وأنَّ ظهور أيِّ عدد آخر هو الفشل.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا من المَرَّات المستقلة حتى التوصُّل إلى أوَّل نجاح اسم التجربة الاحتمالية الهندسية *geometric probability experiment*

شروط التجربة الاحتمالية الهندسية

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية هندسية

(١) اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة ومستقلة.

(٢) كل محاولة لها نتيجتين متنافيتين (نجاح أو فشل).

(٣) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة

(٤) التوقُّف عند أوَّل نجاح

المتغير العشوائى الهندسي

في التجربة الاحتمالية الهندسية إذا كان المتغير العشوائى سـ يرمز إلى الوصول لأول محاولة نجاح فإن سـ يسمى متغيرًا عشوائيًا هندسيًا وسيُرمز بالرمز سـ ~ هندسي (ح) للدلالة على أن سـ متغير عشوائى هندسى ، ح يمثل احتمال النجاح.

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

دالة التوزيع الاحتمالي الهندسي:

إذا كان سـ ~ هندسي (ح) فإن

ل(سـ = ن) = ح (١-ح)$^{\text{ن}-١}$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ......

حيث ح احتمال النجاح ، ن هى عدد المحاولات وصولًا الى أول نجاح

مثال

١ رمى أحمد قطعة نقود وكان النجاح هو ظهور صورة، ما احتمال ظهور الصورة عند المحاولة الرابعة؟

الحل

بفرض أن سـ متغير عشوائي يرمز إلى الوصول لأول محاولة نجاح فإن سـ ~ هندسي ($\frac{١}{٢}$)

ح (صورة) = $\frac{١}{٢}$ ، ن = ٤

ل (سـ = ٤) = $\frac{١}{٢}$ (١ − $\frac{١}{٢}$)$^{٤-١}$ = $\frac{١}{٢}$ × ($\frac{١}{٢}$)^{٣} = ($\frac{١}{٢}$)^{٤} = $\frac{١}{١٦}$

مثال

٢ إذا كان سـ ~ هندسى (٠,٤) فأوجد كلا ممايلى :

أ ل(سـ = ٢)   ب ل(سـ > ٤)   ج ل(سـ = ٦)

الحل

أ ل(سـ = ٢) = ح (١ − ح)$^{\text{ن}-١}$ = ٠,٤ (١ − ٠,٤)$^{٢-١}$ = ٠,٢٤

ب ل (سـ > ٤) = ١ − ل (سـ ≤ ٤)

= ١ − [ل(سـ = ١) + ل (سـ = ٢) + ل (سـ = ٣) + ل (سـ = ٤)]

= ١ - [٠,٤ (١ - ٠,٤)^{٠} + ٠,٤ (١ - ٠,٤)^{١} + ٠,٤ (١ - ٠,٤)^{٢} + ٠,٤ (١ - ٠,٤)^{٣}]

= ١ - [٠,٤ + ٠,٤ (٠,٦)^{١} + ٠,٤ (٠,٦)^{٢} + ٠,٤ (٠,٦)^{٣}]

= ٠,١٢٩٦

ج ل (سـ = ٦) = ح (١ − ح)$^{\text{ن}-١}$ = ٠,٤ (١ − ٠,٤)$^{٦-١}$ = ٠,٠٣١١٠٤

حاول أن تحل

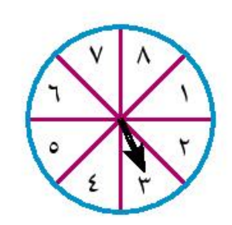
١ إذا كان سـ ~ هندسى (٠,٨) فأوجد كلا ممايلى

أ ل(سـ = ٣)   ب ل(سـ ≤ ٣)   ج ل(سـ > ٣)

د ل (سـ < ٢)   هـ ل (سـ ≤ ٢)   و ل(٢ < سـ ≤ ٤)

مثال

(٣) يحتوي قرص دوار على ثمانية أقسام متساوية مرقمة من ١ إلى ٨، فإذا أدير القرص عدة مرات فأوجد أحتمال أن يستغرق الأمر أكثر من أربع مرات ليشير مؤشره لظهور عدد أولي للمرة الأولى



الحل

بفرض أن س ~ هندسي (ح)

الأعداد الأولية هى ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ∴ ح = $\frac{٤}{٨}$ = ٠,٥

ل (س > ٤) = ١ − ل (س ≤ ٤)

= ١ − [ل (س =١) + ل (س = ٢) + ل (س = ٣) + ل (س = ٤)]

= ١ − [٠,٥ (١ - ٠,٥)^{٠} + ٠,٥ (١ - ٠,٥)^{١} + ٠,٥ (١ − ٠,٥)^{٢} + ٠,٥ (١ - ٠,٥)^{٣}]

= ١ − [٠,٥ + ٠,٥ (٠,٥)^{١} + ٠,٥ (٠,٥)^{٢} + ٠,٥ (٠,٥)^{٣}] = ٠,٠٦٢٥

حل أخر

حساب احتمال أن يستغرق الأمر أكثر من أربع دورات لرؤية عدد أولي للمرة الأولى:هذا يعني أننا نفشل في الحصول على عدد أولي في كل دورة من الدورات الأربع الأولى.الاحتمال يُحسب على أنه

ل (س > ٤) = (٠,٥)^{٤} = ٠,٠٦٢٥

التوقع و التباين للتوزيع الهندسى

المتوسط (التوقع) $\mu = \frac{١}{ح}$

التباين $\sigma^{٢} = \frac{١ - ح}{ح^{٢}}$

الانحراف المعيارى σ = الجذر التربيعى الموجب للتباين

حاول أن تحل

(٢) في مثال ٣ احسب التوقع والانحراف المعياري

توزيع ذى الحدين

يُطلَق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحدَّدًا من المَرّات المستقلة اسم التجربة الاحتمالية ذات الحدَّين.

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنَّها تُعَدُّ تجربة احتمالية ذات حدَّين:

(١) اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة ومستقلة.

(٢) كل محاولة لها نتيجتين فقط نجاح أو فشل.

(٣) ثبات احتمال النجاح في كل محاولة

(٤) وجود عدد مُحدَّد من المحاولات في التجربة.

ملحوظة: سنرمز للمتغير العشوائى الذى يتبع توزيع ذي الحدين بالرمز سـ~ حدين (ن، ح) حيث ن عدد محاولات التجربة ، ح احتمال النجاح

التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي ذي الحدَّين

إذا كان سـ ~ حدين (ن ، ع) فإن التوزيع الأحتمالى للمتغير العشوائى سـ يعطى بالعلاقة الأتية :

ل(سـ = ر) = ^{ن}ق $_{ر}$ ح^{ر} (١ – ح)$^{ن-ر}$ ، ر = ١، ٢، ٣، ...، ن
ن : عدد المحاولات فى التجربة
ح : أحتمال النجاح فى كل محاولة
ر : عدد مرات النجاح (العدد المطلوب).

فمثلاً: إلقاء ٧ قطع نقود منتظمة ثم ملاحظة عدد الصور التى ظهرت على الوجه العلوى (تجربة ذات حدين).
(تمثل تجربة ذات الحدين لأنها تحقق الشروط الأربعة السابقة) .

مثال

٤ في تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة ١٥ مَرَّة، إذا كان سـ متغير عشوائى يعبر عن عدد الصور أوجد احتمال ظهور الصورة ٥ مَرّات.

الحل

نفرض أن سـ ~ حدين (١٥، $\frac{١}{٢}$)

ل(سـ = ر) = ^{ن}ق $_{ر}$ ح ^{ر} (١ - ح) $^{ن - ر}$،

ن = ١٥ ، ر= ٥ ، ح = $\frac{١}{٢}$

ل(سـ = ٥) = ^{١٥}ق $_{٥}$ × ($\frac{١}{٢}$)^{٥} (١ – $\frac{١}{٢}$)$^{١٥ - ٥}$ = ٠,٠٩١٦ تقريباً

مثال

٥ يتألَّف اختبار احصاء من ٥٠ سؤال، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدِّد، ولكلٍّ منها ٤ بدائل، واحدة منها فقط صحيحة. إذا أُجيب عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أنْ تكون إجابات ١٠ أسئلة فقط صحيحة ؟

الحل

بفرض أن سـ ~ حدين (٥٠، $\frac{١}{٤}$)

ل(سـ = ر) = ^{ن}ق $_{ر}$ ح ^{ر} (١ - ح) $^{ن - ر}$

ن = ٥٠ ، ر= ١٠ ، ح = $\frac{١}{٤}$

ل(سـ = ١٠) = ^{٥٠}ق $_{١٠}$ × ($\frac{١}{٤}$)^{١٠} (١ -$\frac{١}{٤}$) $^{٥٠ - ١٠}$ = ٠,٠٩٨٥٢ تقريباً

مثال

⑥ إذا كان احتمال فوز فريق ما فى مبارة لكرة القدم يساوى ٠,٦ فإذا لعب الفريق ٧ مباريات فأوجد:

(أ) احتمال فوزه فى ٤ مباريات فقط (ب) احتمال فوزه فى ٦ مباريات على الأقل

(ج) احتمال فوزه فى مبارتين على الأكثر

الحل

بفرض أن سـ ~ حدين (٧، ٠,٦)

(أ) ل (سـ = ٤) = ^{٧}ق$_{٤}$ × $(٠,٦)^{٤}$ $(١ - ٠,٦)^{٣}$ = ٠,٢٩٠٣٠٤

(ب) ل (سـ ⩾ ٦) = ل (سـ = ٦) + ل (س = ٧)

= ^{٧}ق$_{٦}$ × $(٠,٦)^{٦}$ (١ - ٠,٦) + ^{٧}ق$_{٧}$ × $(٠,٦)^{٧}$ $(١ - ٠,٦)^{\text{صفر}}$ = ٠,١٥٨٦

(ج) ل (سـ ⩽ ٢)

= ل(سـ = ٠) + ل (سـ = ١) + ل (سـ = ٢)

= ^{٧}ق$_{٠}$ $(٠,٦)^{٠}$ $(٠,٤)^{٧}$ + ^{٧}ق$_{١}$ $(٠,٦)^{١}$ $(٠,٤)^{٦}$ + ^{٧}ق$_{٢}$ $(٠,٦)^{٢}$ × $(٠,٤)^{٥}$ = ٠,٠٩٦٢٥٦

مثال

⑦ إذا كان سـ متغيرا عشوائيا ذا الحدين سـ ~ حدين (٣ ، ح) وكان ل(سـ ⩾ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$ أوجد ل(سـ = ٢)

الحل

١ - ل (سـ = ٠) = $\frac{١٩}{٢٧}$

١ - ^{٣}ق$_{٠}$ × $(ح)^{٠}$ $(١ - ح)^{٣}$ = $\frac{١٩}{٢٧}$ ∴ $(١ - ح)^{٣}$ = $\frac{٨}{٢٧}$

∴ ١ - ح = $\frac{٢}{٣}$ ∴ ح = $\frac{١}{٣}$

ل (سـ = ٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ × $(\frac{١}{٣})^{٢}$ $(\frac{٢}{٣})^{١}$ = $\frac{٢}{٩}$

المتوسط و التباين للتوزيع ذى الحدين

إذا كان سـ مُتغيِّرًا عشوائيًّا ذا حدَّين، فإنَّ

المتوسط (التوقع) μ = ن × ح

التباين $\sigma^{٢}$ = ن × ح × (١ - ح)

الانحراف المعيارى σ = الجذر التربيعى للموجب للتباين

حيث ن عدد المحاولات فى التجربة ، ح هو احتمال النجاح في كل محاولة

مثال

٨ **من الحياة:** أُجرِيت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواءً جديدًا. وقد خلُصت الدراسة إلى أنَّ ١٠ ٪ من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيب هذا الدواء ل ١٥٠ طفلًا ، فكم طفلً يُتوقَّع أنْ تظهر عليه هذه الأعراض؟

الحل

س ~ حدين (١٥٠ ، ٠,١)

التوقع = ن × ح = ١٥٠ × ٠,١ = ١٥

إذن، يُتوقَّع أنْ تظهر الأعراض الجانبية للدواء الجديد على ١٥طفل

مثال

٩ ألقى أحمد قطعة نقود غير منتظمة ٢٠٠ مَرَّة، فكان عدد مَرّات ظهور الكتابة هو ١٤٠ مَرَّة. إذا ألقى أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرَّة أُخرى، فأوجد كُلًّ ممّا يأتي

أ العدد المُتوقَّع لمَرّات ظهور الكتابة عند إلقاء أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرَّة.

ب تباين عدد مَرّات ظهور الكتابة عند إلقاء أحمد قطعة النقود ٢٠ مَرَّة

الحل

أ ح = $\frac{١٤٠}{٢٠٠}$ = ٠,٧ ∴ التوقع = ن × ح = ٢٠ × ٠,٧ = ١٤

ب التباين = σ^2 = ن × ح × (١ - ح) = ٢٠ × ٠,٧ × ٠,٣ = ٤,٢

تمارين (٤ - ٣)

أولاً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الأقواس

١ إذا كان احتمال النجاح في تجربة واحدة يساوي ٠,٣ ، فإن احتمال أن تكون المحاولة الأولى التي تحقق فيها النجاح هي المحاولة الثالثة؟

أ ٠,١٤٧ ب ٠,٢١ ج ٠,٣٤٣ د ٠,٠٩

٢ إذا كان احتمال حدوث الفشل في تجربة معينة هو ٠,٨ ، فإن عدد المحاولات المتوقعة قبل النجاح الأول يساوي ....

أ ٣ ب ٤ ج ٥ د ٦

٣ التوقع الرياضي (المتوسط) لتوزيع هندسي مع احتمال نجاح٠,٤ يساوى ......

أ ٣ ب ٤ ج ٥ د ٦

٤ إذا كان احتمال النجاح في تجربة واحدة يساوي ٠,٢، فإن احتمال أن يستغرق الأمر أكثر من أربع محاولات لرؤية النجاح الأول يساوى ....

أ ٠,٤٠٩٦ ب ٠,٤٩١٥ ج ٠,٥٩٠٤ د ٠,٦٧٢٣

٥ التباين لتوزيع هندسى احتمال نجاحه ٠,٤ يساوى ....

أ ٠,٢٥ ب ١,٢٥ ج ٣,٧٥ د ٢,٧٥

٦ إذا كان احتمال النجاح في تجربة واحدة يساوي ٠,٢٥، فإن احتمال أن يحدث النجاح الأول قبل أو في المحاولة الثالثة

أ $\frac{١٥}{٦٤}$ ب $\frac{٣٧}{٦٤}$ ج $\frac{٧}{١٦}$ د $\frac{٦٩}{٦٤}$

٧ إذا كان احتمال النجاح في تجربة واحدة يساوي ٠,٢، فإن احتمال أن يحدث النجاح الأول بعد ٣ محاولات فاشلة يساوى ....

أ ٠,٢٥ ب ٠,٢٥١ ج ٠,٥١٢ د ٠,٢١٥

٨ إذا كانت فرصة نجاح تجربة واحدة تساوي ح=٠,٤ وعدد التجارب هو ن=١٠ فإن احتمال حدوث ٤ نجاحات يساوى ....

أ ٠,٢٥٠٨ ب ٠,٤ ج ٠,٠٥٣٧ د ٠,٠١٢٤

٩ إذا كانت فرصة نجاح تجربة واحدة تساوي ح =٠,٥ وعدد التجارب هو ن=٥ فإن احتمال حدوث ٣نجاحات على الأقل ....

أ ٠,٥ ب ٠,١٨٢٥ ج ٠,١٥٦٢٥ د ٠,٨٤٣٧٥

١٠ إذا كانت فرصة نجاح تجربة واحدة تساوي ح=٠,٣ وعدد التجارب هو ن=٧ فإن احتمال عدم حدوث أي نجاح يساوى ....

أ ٠,٠٠١ ب ٠,٢١٨٧ ج ٠,٥٠٤١ د ٠,٠٨٢

١١ إذا كانت فرصة نجاح تجربة واحدة تساوي ح=٠,٧٥ وعدد التجارب هو ن=١٢ فإن احتمال حدوث ١١ نجاحات أو أكثر يساوى ....

أ ٠,١٥٨٤ ب ٠,١٤٥٤ ج ٠,١٢٣٤ د ٠,٢٦٦٨

١٢ إذا كانت فرصة نجاح تجربة واحدة تساوي ح=٠,٧ وعدد التجارب هو ن=١٠ فإن احتمال الحصول على ٤ نجاحات بالضبط يساوى ....

أ ٠,٠٣٦٨ ب ٠,٢٠٠١ ج ٠,٤٧٨٧ د ٠,٢٦٦٨

(١٣) إذا كان سـ ~ حدين (٥، $\frac{٢}{٣}$) فإن ل(سـ = ٤) يساوى ....

أ) $\frac{٨٠}{٨١}$ ب) $\frac{١٠}{٢٤٣}$ ج) $\frac{٨٠}{٢٤٣}$ د) $\frac{١٦}{٢٤٣}$

(١٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا ذا الحدين سـ ~ حدين (ن ، ح) وكان التوقع يساوى ٨ و التباين = $\frac{٢٠}{٣}$ فإن قيمة ن تساوى ....

أ) ٤٨ ب) ٥٦ ج) ٦٤ د) ٣٢

(١٥) فى تجربة القاء قطعة نقود منتظمة على الأرض ٤ مرات فإن احتمال ظهور الصورة فى٣ مرات فقط يساوى ....

أ) $\frac{١}{١٦}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٨}$ د) $\frac{١}{٤}$

(١٦) ألقت جنة حجر نرد غير منتظم ١٠٠ مرة وكان عدد مرات ظهور العدد ٢ هو ١٠ مرات فإذا إلقت جنة حجر النرد ٣٠ مرة أخرى فإن العدد المتوقع لمرات ظهور العدد ٢ يساوى ....

أ) ٢ ب) ٣ ج) ٦ د) ٩

(١٧) تحتوى آله حاسبة على ١٦ زراً للأعداد من ٠ إلى ٩ إضافة إلى العمليات الأساسية و علامة المسواة و الفاصلة العشرية فإذا أغمض أحمد عينه ثم ضغط على أزرار هذة الآلة ٢٠مرة بصورة عشوائية فإن احتمال أن يضغط على أزرار العمليات الحسابية ٣ مرات فقط يساوى ....تقريبًا

أ) ٠,١٣٤ ب) ٠,١٣٩ ج) ٠,٢٣٩ د) ٠,٢٤٥

(١٨) إذا كسب لاعب ٧٥٪ من مبارياته التى لعبها خلال مسيرته الرياضية فإن احتمال أن يكسب ٣ مباريات من بين ٥ مباريات قادمة يساوى ....

أ) $\frac{١٣٥}{٥١٢}$ ب) $\frac{٤٥}{٥١٢}$ ج) $\frac{٥}{١٠٢٤}$ د) $\frac{٤٧}{٥١٢}$

(١٩) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية ٩٠٪ فإن احتمال عملية واحدة على الإقل إذا إجريت العملية ثلاث مرات هى ....

أ) ٠,٠٠١ ب) ٠,١ ج) ٠,٩ د) ٠,٩٩٩

(٢٠) تقدمت منى لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل فإن احتمال أن تحصل منى على ٧ أسئلة صحيحة يساوى ....

أ) ٠,٠٠٠٣٠٨ ب) ٠,٢٥ ج) ٠,٠٣٠٨ د) ٠,٠٣٠٨

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) شركة إنتاج تقوم بتصنيع قطع إلكترونية. احتمال أن تكون القطعة معيبة هو ٠,٠٥. فإذا قامت الشركة بفحص ٢٠ قطعة من إنتاجها عشوائياً. ما احتمال أن تكون هناك ٢ قطعة معيبة بالضبط؟

(٢) في مركز خدمة العملاء، احتمال أن يتم حل مشكلة العميل في المكالمة الأولى ٠,٢. ما احتمال أن يتم حل المشكلة في المكالمة الثالثة؟

(٣) احتمال أن يوافق شخص على عرض تسويقي عبر الهاتف ٠,١. ما احتمال أن يوافق أول شخص في المكالمة الخامسة؟

(٤) احتمال أن يتم تسليم الطلب في الوقت المحدد هو ٠,٩. إذا تم تسليم ١٢ طلبًا، ما هو احتمال أن يتم تسليم ١٠ طلبات منها في الوقت المحدد؟

(٥) ورشة لإصلاح الأجهزة، احتمال إصلاح جهاز معين بنجاح هو ٠,٨٥. إذا تم إصلاح ١٥ جهازًا، ما هو احتمال إصلاح ١٣ جهازًا منها بنجاح

(٦) احتمال أن تكون رسالة بريد إلكتروني معينة غير مرغوب فيها (مزعجة) هو ٠,٢. إذا استلمت ٢٥ رسالة بريد إلكتروني، ما هو احتمال أن تكون ٥ منها مزعجة؟

(٧) احتمال أن تنمو بذرة معينة بعد زراعتها هو ٠,٧. إذا زرع مزارع ٣٠ بذرة، ما هو احتمال أن تنمو ٢٠ بذرة منها؟

(٨) احتمال أن يصوت ناخب معين لصالح مرشح معين هو ٠,٦. إذا تم اختيار ١٠ ناخبين بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن يصوت ٨ منهم على الأقل لصالح المرشح؟

(٩) احتمال أن يتبرع شخص لحملة معينة هو ٠,١. إذا تم التواصل مع ١٠٠ شخص، ما هو احتمال أن يتبرع ٢ منهم على الآكثر؟

(١٠) احتمال أن يجد شخص موقفًا للسيارة في محاولته الأولى هو ٠,٣. ما هو احتمال أن يجد الموقف في محاولته الرابعة؟

(١١) احتمال أن ينجح الفني في إصلاح الآلة من المحاولة الأولى هو ٠,٦. ما هو احتمال أن يتم الإصلاح بنجاح في المحاولة الثانية؟

(١٢) احتمال أن يوافق زبون على عرض بيع معين هو ٠,١٥ ما هو احتمال أن يوافق أول زبون في المكالمة الرابعة؟

(١٣) احتمال اكتشاف عطل في جهاز معين عند فحصه هو ٠,١. ما هو احتمال اكتشاف العطل في الفحص الثاني؟

(١٤) احتمال أن تحصل شركة على موافقة جهة تنظيمية من المحاولة الأولى هو ٠,٣. ما هو احتمال الحصول على الموافقة في المحاولة الثالثة على الأكثر؟

دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى المتصل

Probability Density Function Of Random Variable

سوف تتعلم

- دالة الكثافة الاحتمالية

المصطلحات الأساسية

- كثافة احتمالية *Probability Density*

المتغير العشوائى المستمر أو المتصل *Continuous Random Variable*



تعريف: المتغير العشوائى المستمر (المتصل): مداه فترة من الأعداد الحقيقية (مغلقة أو مفتوحة)، أى إنها مجموعة غير قابلة للحصر من الأعداد الحقيقية.

ومن أمثلة ذلك:

- أجر عامل بالدولة تم اختياره عشوائيًّا.
- درجة الحرارة المتوقعة خلال أحد الأيام.
- طول احد المرشحين لفريق كرة السلة.



مثال

المتغير العشوائى المستمر

(١٠) النقطة (س ، ص) تقع داخل أو على الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٤$ التى مركزها نقطة الأصل (و) ونصف قطرها ٢ وحدة طول والمطلوب إيجاد مدى المتغير العشوائى سـ الذى يعبر عن بعد النقطة عن مركز الدائرة .

الحل

∵ ف = { (س ، ص): $س^٢ + ص^٢ \leqslant ٤$ }

∴ ٠ ≤ أ ≤ ٢ حيث أ بعد النقطة (س ، ص) عن مركز الدائرة.

∴ مدى المتغير العشوائى سـ = [٠ ، ٢]



نلاحظ أن كل نقطة فى هذه الفترة هى قيمة ممكنة للمتغير العشوائى سـ كما هو موضح بالشكل

حاول أن تحل

(١) إذا كان أقصى عُمر افتراضى لأحد أنواع الهواتف المحمولة «سـ» يقدر بـ ١٨ ساعة تشغيل. فاكتب مدى سـ.

حاول أن تحل

(٢) بين أيًّا مما يأتى يدل على متغير عشوائي متقطع وأيها يدل على متغير عشوائى متصل.

(أ) عدد أرغفة الخبز التى أنتجها مخبز خلال ساعة.

(ب) الوقت الذى يستغرقه كريم فى انتظار صديقه زياد.

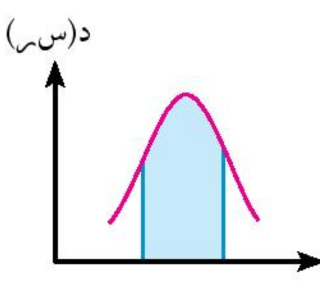
الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية. برامج رسومية للحاسب.

ج) عدد الأهداف التى سجلها الفريق الفائز فى مباريات كرة اليد.

د) عدد المخالفات المرورية المسجلة على طريق مصر - إسكندرية الصحراوى خلال يوم.

هـ) الوقت الذى يستغرقه المعلم فى شرح درس المتغير العشوائى.

دالة الكثافة الاحتمالية : *Probability Density Function*



لأى متغير عشوائى متصل (مستمر) سـ توجد دالة حقيقيةمداها غير سالب يرمز لها بالرمز د(س) تسمى دالة الكثافة الاحتمالية يمكن من خلالها إيجاد احتمالات الأحداث المعبرة عنها بواسطة المتغير العشوائى من خلال المساحة المحصورة أسفل منحنى الدالة وأعلى محور السينات ويتم حساب ل(أ < سـ < ب) بحساب مساحة الجزء المظلل من منحنى الدالة د بين القيمتين أ ، ب كما فى الشكل المقابل.

وتحقق هذه الدالة الشروط الآتية :

- د(سـ) ≥ ٠ لجميع قيم س التي تنتمى لمجال الدالة.
- مساحة المنطقة الواقعة أسفل منحنى الدالة د وأعلى محور السينات تساوى الواحد الصحيح.

مثال

١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦}(٢س - ١) & ،\ ١ \leq س \leq ٣ \\ صفر & ،\ فيما\ عدا\ ذلك \end{cases}$$

أ) **أثبت أن** : ل (١ < سـ < ٣) = ١

ب) **أوجد** : ل (سـ < ٢)، ل (سـ > ٢,٥)، ل (٢ ≤ سـ ≤ ٢,٥).

الحل

تذكر أن

مساحة المستطيل = الطول × العرض

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

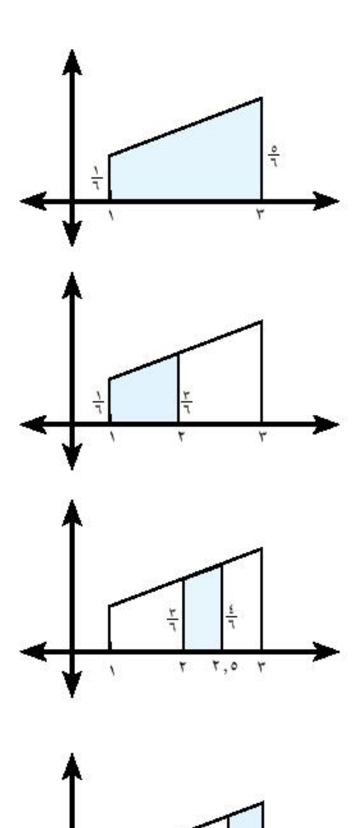
مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

$د(١) = \frac{١}{٦} \times (٢ - ١) = \frac{١}{٦}$

$د(٣) = \frac{١}{٦} \times (٦ - ١) = \frac{٥}{٦}$

$د(٢) = \frac{١}{٦} \times (٤ - ١) = \frac{٣}{٦}$

$د(٢,٥) = \frac{١}{٦} \times (٥ - ١) = \frac{٤}{٦}$



أ) $ل\ (١ \leq س \leq ٣) = \frac{١}{٢} (\frac{١}{٦} + \frac{٥}{٦}) \times ٢$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٦}{٦} \times ٢ = ١$

ب) $ل\ (س < ٢) = ل\ (١ \leq س \leq ٢)$

$= \frac{١}{٢} (\frac{١}{٦} + \frac{٣}{٦}) \times ١$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٦} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

، $ل\ (س > ٢,٥) = ل\ (٢,٥ < س \leq ٣)$

$= \frac{١}{٢} (\frac{٤}{٦} + \frac{٥}{٦}) \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٩}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢٤} = \frac{٣}{٨}$

، $ل\ (٢ \leq س \leq ٢,٥) = \frac{١}{٢} (\frac{٣}{٦} + \frac{٤}{٦}) \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٧}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{٧}{٢٤}$

لاحظ أن: $ل\ (٢ \leq س \leq ٢,٥) = ١ - [\ ل\ (س \leq ٢) + ل\ (س \geq ٢,٥)\ ]$

$= ١ - (\frac{١}{٣} + \frac{٣}{٨}) = ١ - \frac{١٧}{٢٤} = \frac{٧}{٢٤}$

حاول أن تحل

٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا حيث:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٥٠}(١٧ - ٢ س) & \text{حيث } ١ < س < ٦ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ) **أثبت أن** د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائي س.

ب) **أوجد** $ل\ (س < ٣)$

جـ) **أوجد** $ل\ (٤ < س < ٧)$

مثال

٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢ س + ك}{٢٤} & \text{حيث } ١ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أ) أوجد قيمة ك.

ب) أوجد $ل\ (س < ٣)$

الحل

$\because$ ل (١ > سـ > ٤) = ١ $\quad\quad \therefore \frac{١}{٢}\left(\frac{٢ + ك}{٢٤} + \frac{٨ + ك}{٢٤}\right) \times ٣ = ١$

$\therefore \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{١٠ + ٢ك}{٢٤} = ١ \quad\quad \therefore$ ك = ٣

، د(٣) = $\frac{٦ + ٣}{٢٤} = \frac{٩}{٢٤}$ ، د(٤) = $\frac{٨ + ٣}{٢٤} = \frac{١١}{٢٤}$ ،

$\therefore$ ل (سـ > ٣) = $\frac{١}{٦}\left(\frac{٩}{٢٤} + \frac{١١}{٢٤}\right) \times ١ = \frac{١}{٦} \times \frac{٢٠}{٢٤} = \frac{٥}{١٢}$

حاول أن تحل

(٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هو :

د(س) = $\begin{cases} \frac{٢ س + ١}{٢٨} & ١ < سـ < ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$

(أ) أوجد قيمة أ إذا كان ل (سـ > أ) = $\frac{١}{٧}$ (ب) أوجد قيمة ب إذا كان ل (ب > سـ > ب + ٢) = $\frac{١}{٢}$

تمـــارين (٤ - ٤)

أولًا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو :

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٢} & \text{حيث } ٢ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ فإن ل (سـ > ٣) =

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

(٢) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو :

د(س) = $\begin{cases} \text{ك س} & \text{حيث } ٢ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ فإن ك =

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(٣) إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى سـ هو:

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٦} & \text{حيث } -٣ < س < ٣ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$ فإن ل (سـ = ٣) =

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٦}$ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

ثانيًا: أجب عن الأسئلة الاتية :

(٤) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا حيث:

د(س) = { (س + ٣) / ١٨ حيث -٣ < س < ٣
صفر فيما عدا ذلك

أوجد : **أولاً**: ل (سـ < ٠) **ثانيًا** : ل (-١ < سـ < ٢)

(٥) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { (٢س + ١) / ٢٤ حيث ٢ < س < ٥
صفر فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : ل (٣ < سـ < ٥) **ثانيًا** : ل (سـ < ٤)

(٦) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا حيث :

د(س) = { ٢ (س + ١) / ٢٧ حيث ٢ < س < ٥
صفر فيما عدا ذلك

أولًا : أثبت أن د(س) دالة كثافة للمتغير العشوائى سـ. **ثانيًا** : أوجد ل (سـ < ٣)

(٧) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { (٢س + ١) / ١٨ حيث ١ < س < ٤
صفر فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : ل (سـ < ٣) **ثانيًا** : ل (٢ < سـ < ٤)

(٨) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { أ س حيث ٠ < س < ٤
صفر فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : قيمة أ **ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

(٩) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { ١/٨ س + أ حيث ٠ < س < ٤
صفر ، فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : قيمة أ **ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

(١٠) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { أ س / ٢ حيث ٠ < س < ٤
صفر فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : قيمة أ **ثانيًا** : ل (١ < سـ < ٣)

(١١) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { (س − ١) / ك   حيث ١ < س < ٥
        صفر   فيما عدا ذلك

أوجد : **أولًا** : قيمة ك   **ثانيًا** : ل (٢ < سـ < ٣)

تفكير ابداعى :

(١٢) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

د(س) = { س / ٦   حيث ٠ < س < ٢
        ١ / ٣   حيث ٢ < س < ٤
        صفر   فيما عدا ذلك

فاحسب: (أ) ل (١ < س < ٢)   (ب) قيمة أ التى تجعل ل (٢ < سـ < أ) = ٠,٥

(١٣) إذا كان سـ متغيرا عشوائيا متصلا، دالة كثافة الاحتمال له هى:

د(س) = { (٣س + ١) / ٤٠   حيث ١ ≤ س ≤ ٥
        صفر   فيما عدا ذلك

وكان أ، ب ∈ [١، ٥] اوجد

(أ) قيمة أ اذا كان ل (أ < سـ < أ + ٢) = ٧ / ٢٠   (ب) قيمة ب اذا كان ل (سـ < ب) = ٦٩ / ٨٠



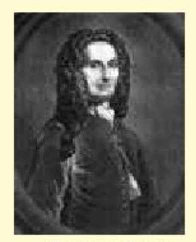

التوزيع الطبيعى

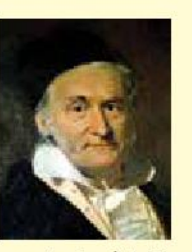
Normal Distribution



مقدمة الوحدة

يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية التى تدرس فى مقررات الإحصاء نظرًا لاستخداماتها المختلفة لنواتج بعض العمليات فى العلوم الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية حيث يتعامل مع معظم الظواهر فى حياتنا اليومية، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعى العالم الفرنسى إبراهام دى موافر (Abraham de Moivre) عام ١٧٥٦ م فى إحدى مطبوعاته، كما شارك فى تطويره عدد من العلماء من أشهرهم العالم الألمانى كارل فريدك جاوس (Carl Friedrich Gauss) (١٧٧٧ م – ١٨٥٥ م) والذى يسمى التوزيع الطبيعى أحيانًا باسمه (منحنى جاوس أو منحنى الجرس).


إبراهام دى موافر


كارل فريدك جاوس

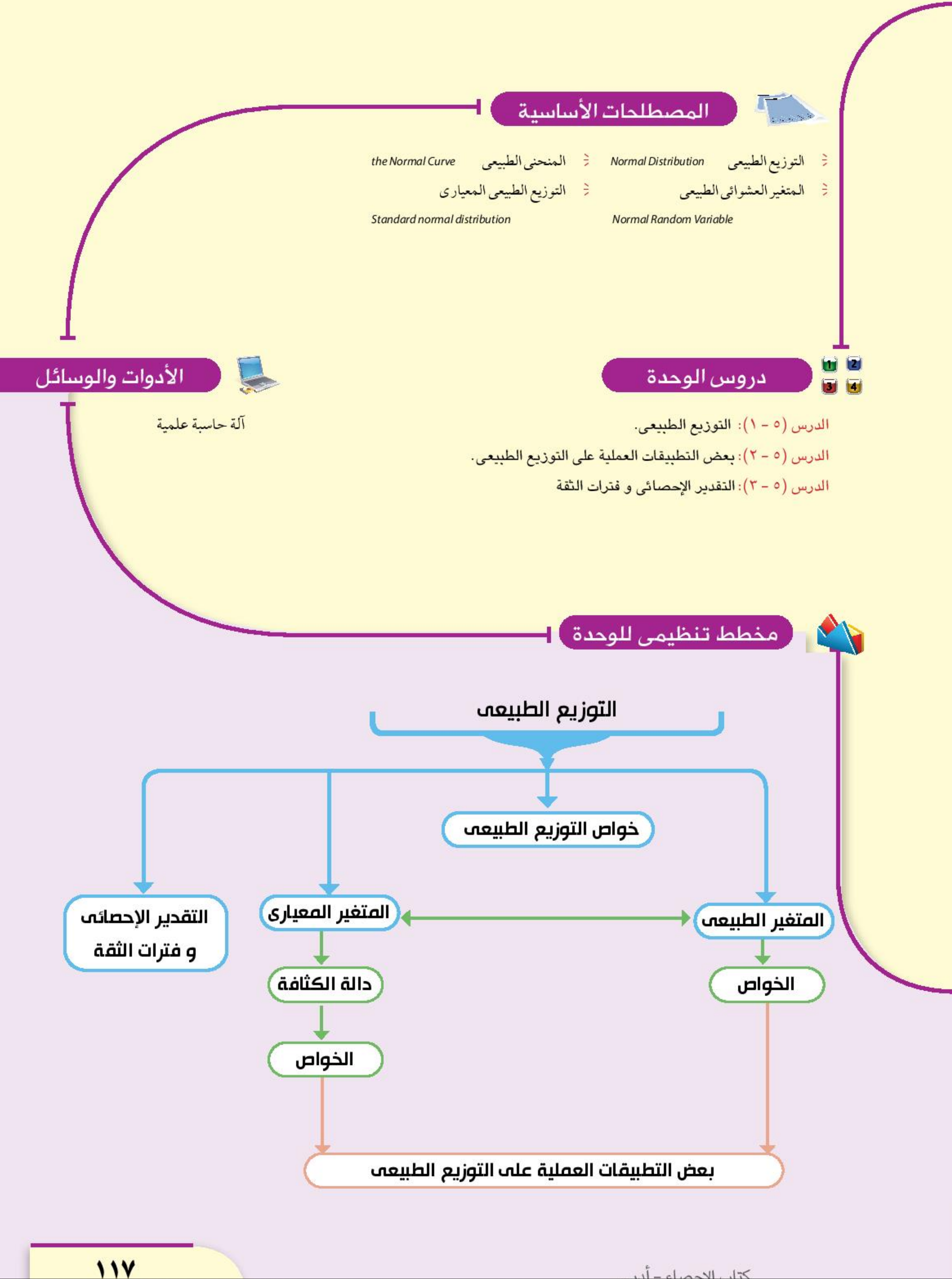
ومن أشهر تطبيقات التوزيع الطبيعى التقييم الإدارى للمرؤوسين وذلك لضمان قدر من العدالة، كما يستخدم فى دراسة البواقى لتحليل الانحدار، كما أن له علاقة وطيدة فى خرائط الضبط (Control Charts) وغيرها.



أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة وتنفيذ الأنشطة فيها من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف التوزيع الطبيعى الاعتدالى وخواصه.
- يحسب احتمال المتغير المعيارى.
- يحسب احتمال المتغير الطبيعى غير المعيارى.
- يتعرف المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى، والشكل العام للمنحنى الممثل لدالة الكثافة لهذا المتغير.
- يحول أى متغير عشوائى طبيعى إلى متغير طبيعى معيارى.
- يوجد قيم احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية.
- يصف خواص منحنى التوزيع الطبيعى، وبعض الظواهر التى يعبر عنها.
- يفسر نتائج حصل عليها من حساب الاحتمال لمتغير عشوائى طبيعى.
- تقدير المتوسط الحسابى لمجتمع بنقطة.
- تقدير المتوسط الحسابى لمجتمع بفترة ثقة.



المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *the Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

دروس الوحدة

الدرس (٥ - ١): التوزيع الطبيعى.

الدرس (٥ - ٢): بعض التطبيقات العملية على التوزيع الطبيعى.

الدرس (٥ - ٣): التقدير الإحصائى و فترات الثقة

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

مخطط تنظيمى للوحدة

الوحدة الخامسة

٥ - ١

التوزيع الطبيعى

Normal Distribution

سوف تتعلم

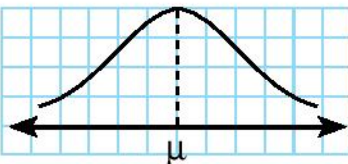
- المتغير العشوائى الطبيعى
- بعض خواص المنحنى الطبيعى
- التوزيع الطبيعى المعيارى
- خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى
- حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى.

المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

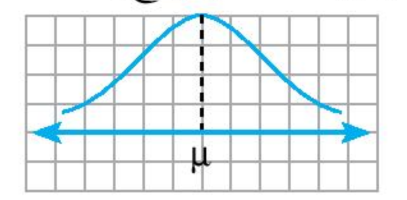
مقدمة:

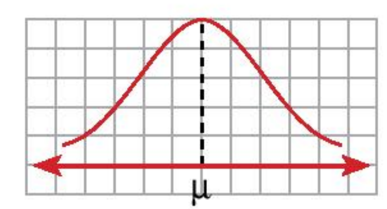
يعد التوزيع الطبيعى من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة لما له من خواص نظرية هامة ، كما يمكن لنواتجه أن تأخذ أى قيمة فى فترة من الأعداد الحقيقية ومثال ذلك أطوال البالغين وأوزان الأطفال عند الولادة ودرجة الذكاء عند الإنسان .... إلخ ويوصف التوزيع الطبيعى بمعادلة رياضية تحدد منحناه وهى تتعين تعيينًا تامًّا بمعرفة التوقع (المتوسط) μ والانحراف المعيارى σ ويشبه هذا المنحنى شكل الجرس وهو متماثل حول المستقيم س = μ ويتقارب طرفاه من المحور الأفقى حيث يمتد طرفاه إلى مالا نهاية كما هو موضح بالشكل المقابل.



المتغير العشوائى الطبيعى: *Normal Random Variable*

يقال للمتغير العشوائى المتصل س إنه "متغير عشوائى طبيعى" إذا كان مداه يتحدد بالفترة] - ∞ ، ∞ [ودالة الكثافة الاحتمالية له تمثل بمنحنى يتخذ دائمًا شكل الناقوس (الجرس) ويسمى منحنى دالة الكثافة بالمنحنى الطبيعى أو "منحنى جاوس" ويتحدد شكل المنحنى الطبيعى بمعرفة قيمتين أساسيتين هما : المتوسط μ والانحراف المعيارى σ للمتغير العشوائى س كما هو موضح بالأشكال التالية .





بعض خواص المنحنى الطبيعى *Some Properties of the Normal Curve*

(١) له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى - ∞ ، ∞ .

(٢) له محور تماثل يمر بالقمة ويقطع المحور الأفقى عند س = μ .

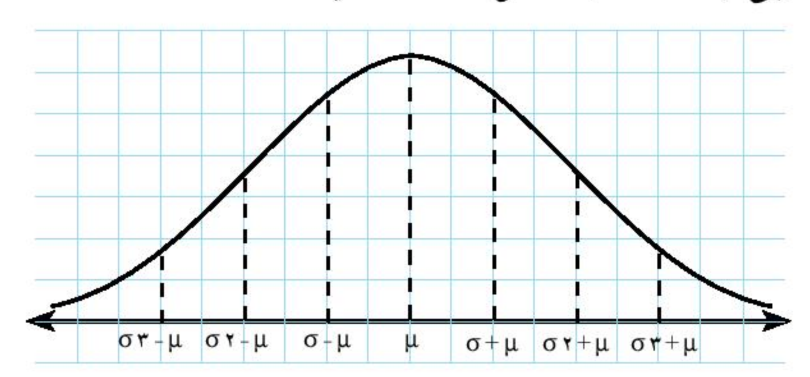
(٣) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح .

(٤) من التماثل نجد أن المستقيم س = μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠,٥ .

الأدوات المستخدمة آلة حاسبة علمية.

(٥) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى وأعلى محور السينات تبعًا للفترات الآتية :

- من $\mu - \sigma$ إلى $\mu + \sigma$ = ٦٨,٢٦ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٢\sigma$ إلى $\mu + ٢\sigma$ = ٩٥,٤٤ ٪ من المساحة الكلية .
- من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٩٩,٧٤ ٪ من المساحة الكلية .



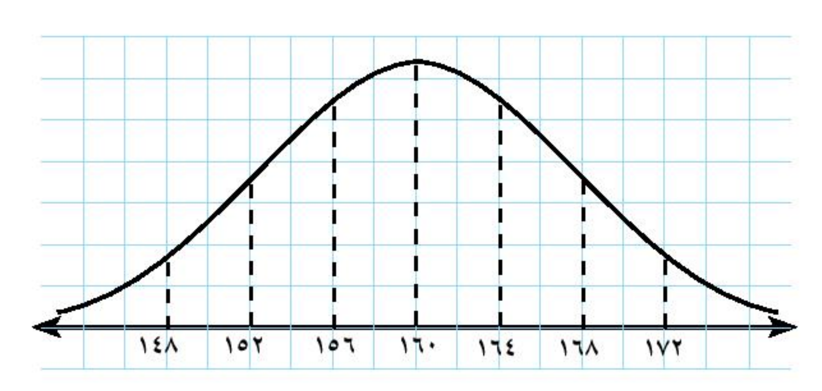
لاحظ أن : يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا حتى يكون التوزيع الطبيعى تقريبيًا .

مثال

(١) إذا كان أطوال طلاب إحدى المدارس يتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ١٦٠ سم ، انحراف معيارى ٤ سم .اختير أحد الطلاب عشوائيًّا أوجد احتمال أن يكون :

(أ) أكبر من ١٧٢ سم (ب) أقل من ١٥٦ سم (ج) محصور بين ١٥٦ سم ، ١٦٨ سم


الحل



من المعطيات نجد أن : المتوسط μ = ١٦٠ ، الانحراف المعيارى σ = ٤

بمقارنة البيانات مع منحنى التوزيع الطبيعى نجد أن: μ + ٣ س = ١٦٠ + ٣ × ٤ لذلك فإن

(أ) ل(س > ١٧٢) = ل(س > $\mu + ٣\sigma$)

∵ المساحة من $\mu - ٣\sigma$ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٩٩٧٤

∴ المساحة من μ إلى $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٩٩٧٤ ÷ ٢ = ٠,٤٩٨٧

∴ المساحة على يمين $\mu + ٣\sigma$ = ٠,٥ - ٠,٤٩٨٧ = ٠,٠٠١٣

ب ل(س < ١٥٦) = ل(س < μ - σ)

∵ المساحة من μ - σ إلى μ + σ = ٠,٦٨٢٦ ∴ المساحة من μ إلى μ - σ = ٠,٦٨٢٦ ÷ ٢ = ٠,٣٤١٣

∴ المساحة على يسار μ - σ = ٠,٥ - ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٨٧

ج ل(١٥٦ < س < ١٦٨) = ل(μ - σ < س < μ + ٢σ)

= ل(μ - σ < س < μ) + ل(μ < س < μ + ٢σ)

= $\frac{٠,٦٨١٦}{٢}$ + $\frac{٠,٩٥٤٤}{٢}$ = ٠,٣٤٠٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٨١٨

حاول أن تحل

(١) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٦٨ كجم وتباينه ١٦ كجم² فأوجد:

أ) احتمال أن يكون الوزن أكبر من ٧٢ كجم

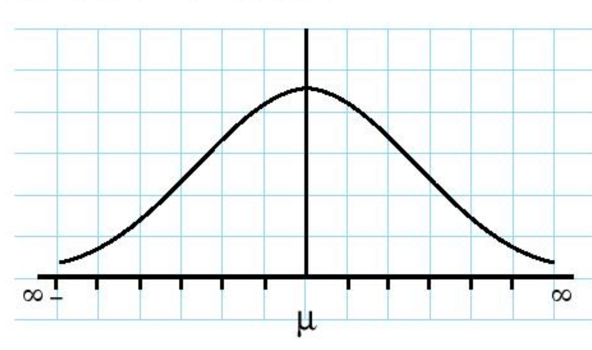
ب) النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٤ كجم ، ٧٢ كجم "وزن كل منهم"

ج) عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن ٦٤ كجم إذا كان عدد طلاب الكلية ٢٠٠٠ طالب.

التوزيع الطبيعى المعيارى

Standard normal distribution

لاحظنا فى التوزيع الطبيعى أنه عند إيجاد الاحتمال تكون أطوال الفترات من مضاعفات الانحراف المعيارى حتى يمكن حساب الاحتمال ، لذلك كان من المناسب تحويل التوزيعات الطبيعية إلى توزيعات طبيعية معيارية وذلك بتحويل قيم (س) إلى قيم معيارية (ص) وذلك بمعلومية المتوسط (μ) والانحراف المعيارى (σ) ، عندها يكون: μ = ٠ ، σ = ١





إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ فإن: ص = $\frac{س - μ}{σ}$ هو توزيع طبيعى معيارى. متوسطه μ = صفر وانحرافه المعيارى σ = ١

بعض خواص دالة الكثافة للتوزيع الطبيعى المعيارى (ص):

(١) المنحنى يقع أعلى المحور الأفقى (محور السينات).

(٢) متماثل بالنسبة للمحور الرأسى (محور الصادات).

(٣) طرفا المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دون أن يلتقيا بالمحور الأفقى.

(٤) مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوق المحور الأفقى = ١

(٥) من التماثل نجد أن المحور الرأسى يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منها = ٠,٥

(٦) يمكن حساب المساحة التقريبية للمنطقة أسفل المنحنى المعيارى فقط وفوق أى فترة] أ ، ب [بواسطة جداول خاصة.

جدول المساحة أسفل منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى :

Table of the area under the standard normal distribution curve

لتحويل التوزيع الطبيعى س إلى توزيع طبيعى معيارى ص نستخدم العلاقة :

ص $= \frac{س - \mu}{\sigma}$ ومن جدول التوزيع الطبيعى المعيارى المرفق فى نهاية الكتاب يمكن إيجاد المساحة المطلوبة .

وفيما يلى نوضح كيفية الكشف فى جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى .

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠						٠,٠١٩٩				
٠,١										
٠,٢										
٠,٣										
٠,٤	٠,١٥٥٤									
٠,٥										
٠,٦				٠,٢٣٥٧						
٢,٥								٠,٤٩٤٩		
٣,٥										

ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٠٥) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة [٠ ، ٠,٠٥] أى أن ى = ٠,٠٥، لذلك نبحث فى الجدول بالصف ٠,٠٠ وتحت العمود ٠,٠٥ فنجد العدد هو ٠,٠١٩٩

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٠٥) = ٠,٠١٩٩

ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٤) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة

[٠ ، ٠,٤] أى أن ى = ٠,٤ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٤ وتحت العمود ٠,٠٠ فنجد العدد ٠,١٥٥٤

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٤) = ٠,١٥٥٤

ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٦٣) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة

[٠ ، ٠,٦٣] أى أن ى = ٠,٦٣ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٠,٦ وتحت العمود ٠,٠٣ فنجد العدد ٠,٢٣٥٧

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ٠,٦٣) = ٠,٢٣٥٧

ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٥٧) = المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى فوق الفترة

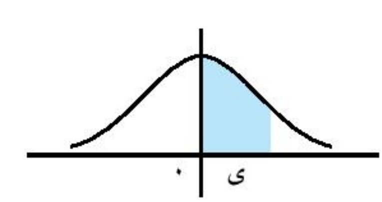
[٠ ، ٢,٥٧] أى أن ى = ٢,٥٧ ، لذلك نبحث فى الجدول بالصف أمام ٢,٥ وتحت العمود ٠,٠٧ فنجد العدد ٠,٤٩٤٩

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٥٧) = ٠,٤٩٤٩

حساب الاحتمال للمتغير الطبيعى المعيارى:

Calculating the probability of the standard normal variable

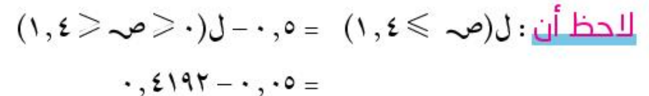
(١) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [٠ ، ى] من الجدول



جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى يعطى المساحة التقريبية فوق الفترة [٠ ، ى] وأسفل المنحنى الطبيعى حيث ى ≥ ٠ ، أى أن الجدول يعطينا مباشرة: ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

فمثلًا: ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٣) = ٠,١١٧٩ ، ل (٠ < ص ≤ ٠,٦٤) = ٠,٢٣٨٩

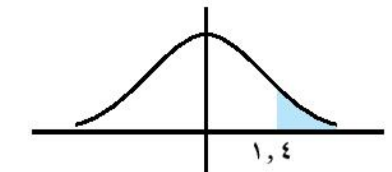
، ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٧) = ٠,٤٥٥٤ ، ل (٠ ≤ ص < ٢,٤٥) = ٠,٤٩٢٩

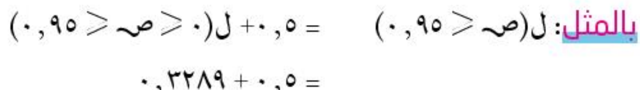


لاحظ أن: ل(ص ≥ ١,٤) = ٠,٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤)

= ٠,٠٥ − ٠,٤١٩٢

= ٠,٠٨٠٨





بالمثل: ل(ص ≤ ٠,٩٥) = ٠,٥ + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٩٥)

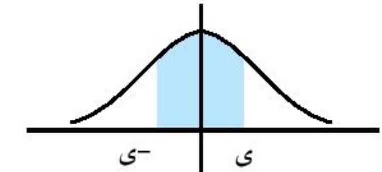
= ٠,٥ + ٠,٣٢٨٩

= ٠,٨٢٨٩

(٢) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى الفترة [− ى ، ٠] من الجدول

من تماثل المنحنى الطبيعى المعيارى حول المحور الرأسى نجد أن :

ل (-ى ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



فمثلًا: ل (-١,٢٥ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٢٥) = ٠,٣٩٤٤

، ل (-٢,٢٤ ≤ ص ≤ ٠) = ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٢٤) = ٠,٤٨٧٥

، ل (ص ≤ -١,٦) = ٠,٥ − ل (-١,٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦)

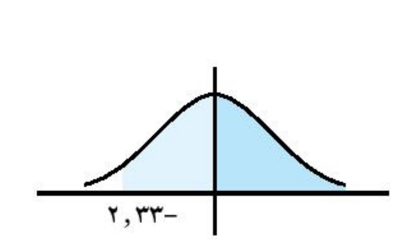
= ٠,٥ − ٠,٤٤٥٢ = ٠,٠٥٤٨

، ل (ص ≥ -٢,٣٢) = ٠,٥ + ل (-٢,٣٢ ≤ ص ≤ ٠)

= ٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٣٢)

= ٠,٥ + ٠,٤٨٩٨ = ٠,٩٨٩٨

ملاحظة: ل (-ى ≤ ص ≤ ى) = ٢ × ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



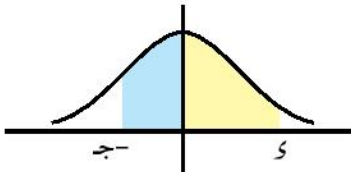
فمثلًا: ل(-١,٤ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٤) = ٢ × ٠,٤١٩٢

= ٠,٨٣٨٤

، ل(-٢,٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢× ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٠) = ٢ × ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٥٤٤

(٣) إيجاد مساحة المنطقة تحت المنحنى فى أى فترة [جـ ، ى] :

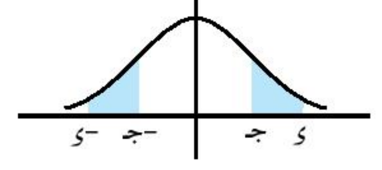
فى هذه الحالة يفضل الاستعانة برسم المنحنى المعيارى مع ملاحظة أن المحور الرأسى يقسم المساحة تحت المنحنى وفوق المحور الأفقى إلى منطقتين متساويتين فى المساحة ومساحة كل منهما = ٠,٥ .



أولًا: ل (- جـ ≤ ص ≤ ى) حيث جـ ، ى موجبان

= ل (- جـ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)

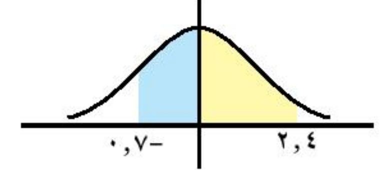
= ل (٠ ≤ ص ≤ جـ) + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)



ثانيًا: ل (جـ ≤ ص ≤ ى) = ل (- ى ≤ ص ≤ -جـ)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ى) - ل (٠ ≤ ص ≤ جـ)


فمثلا :

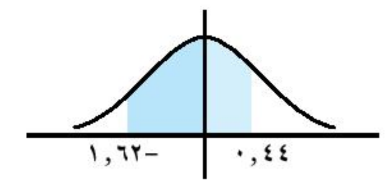


(١) ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٧) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤)من التماثل

= ٠,٢٥٨٠ + ٠,٤٩١٨ = ٠,٧٤٩٨



(٢) ل (-١,٦٢ < ص ≤ ٠,٤٤)

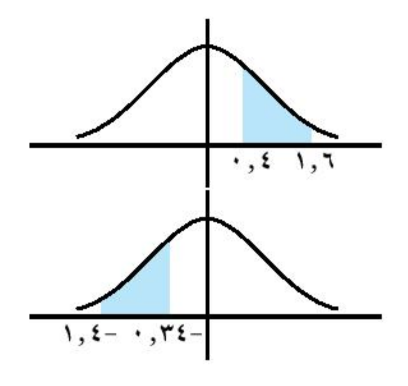
= ل(-١,٦٢ < ص ≤ ٠)+ ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٦٢) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤) من التماثل

= ٠,٤٤٧٤ + ٠,١٧٠٠ = ٠,٦١٧٤

(٣) ل (٠,٤ ≤ ص < ١,٦) = ل(٠ ≤ ص < ١,٦) - ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤)

= ٠,٤٤٥٢ - ٠,١٥٥٤ = ٠,٢٨٩٨

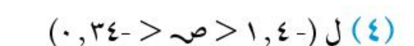


(٤) ل (-١,٤ < ص < -٠,٣٤)

= ل(-١,٤ < ص ≤ ٠) - ل(-٠,٣٤ < ص < ٠)

= ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٤) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٣٤) من التماثل

= ٠,٤١٩٢ - ٠,١٣٣١ = ٠,٢٨٦١

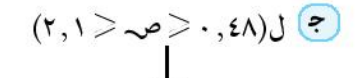


مثال

إيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

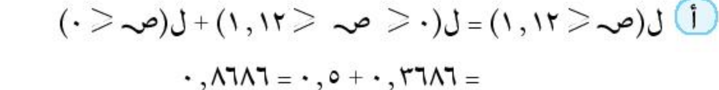
(٢) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

(أ) ل(ص ≤ ١,١٢)
(ب) ل(ص ≥ ١,٦٤)

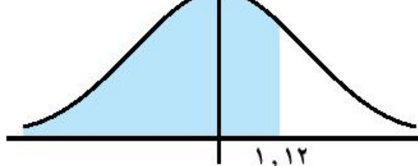

(ج) ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

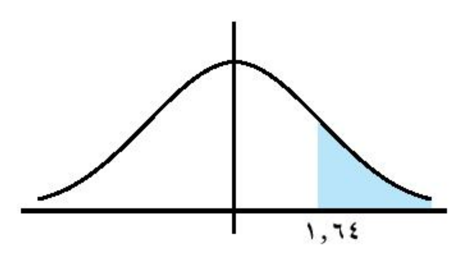
الحل




(أ) ل(ص ≤ ١,١٢) = ل(٠ ≤ ص ≤ ١,١٢) + ل(ص ≤ ٠)

= ٠,٣٦٨٦ + ٠,٥ = ٠,٨٦٨٦

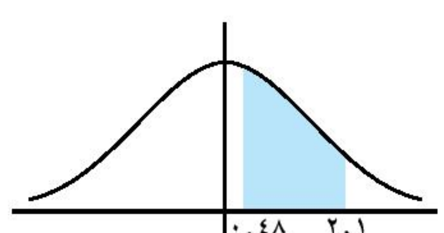




ب) ل(ص ≥ ١,٦٤)

= ل(ص ≥ ٠) - ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٦٤)

= ٠,٥ − ٠,٤٤٩٥ = ٠,٠٥٠٥



ج) ل(٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,١) - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٨)

= ٠,٤٨٢١ − ٠,١٨٤٤ = ٠,٢٩٧٧

حاول أن تحل

٢) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

أ) ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٨٢) ب) ل(ص ≥ ٢,٣٢)

ج) ل(ص ≤ ١,٦٤) د) ل(١,٠٨ ≤ ص ≤ ٣,١٢)

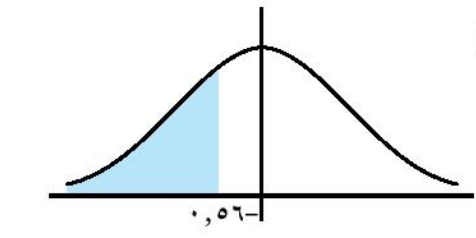
مثال

٣) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

أ) ل(ص ≤ - ٠,٥٦) ب) ل(ص ≥ - ١,٠٦)

ج) ل(- ١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨) د) ل(- ٢,٢ ≤ ص ≤ - ٠,٤٦)

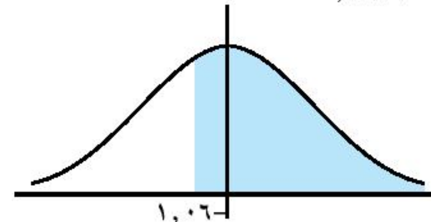
الحل

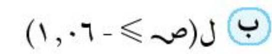


أ) ل(ص ≤ - ٠,٥٦)

= ل(ص ≥ ٠,٥٦)

= ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٥٦) = ٠,٥ − ٠,٢١٢٣ = ٠,٢٨٧٧



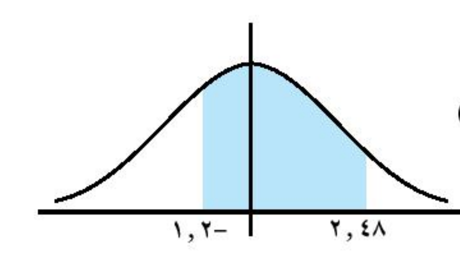


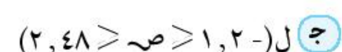
ب) ل(ص ≥ - ١,٠٦)

= ل(ص ≤ ١,٠٦)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٠٦) + ٠,٥

= ٠,٠٦٣٦ + ٠,٥ = ٠,٥٦٣٦





ج) ل(- ١,٢ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(- ١,٢ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ١,٢) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٨)

= ٠,٣٨٤٩ + ٠,٤٩٣٤ = ٠,٨٧٨٣

د) ل(-٢,٢ ≤ ص < -٠,٤٦)

= ل(-٢,٢ ≤ ص ≤ ٠) - ل(-٠,٤٦ ≤ ص ≤ ٠)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢,٢) - ل(٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٦)

= ٠,٤٨٦١ - ٠,١٧٧٢ = ٠,٣٠٨٩

حاول أن تحل

٣) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد:

أ) ل(ص < -٠,٥٦)

ب) ل(ص ≥ -١,٠٦)

جـ) ل(-١,٢ ≤ ص < ٢,٤٨)

د) ل(-٢,٢ ≤ ص < -٠,٤٦)

مثال

التحويل من متغير طبيعي إلى متغير طبيعي معياري

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. أوجد:

أ) ل(س > μ - ١,٥σ)

ب) ل(س < μ - ٠,٥σ)

جـ) ل(μ - ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)

الحل

أ) ل(ص > $\frac{\mu - ١,٥\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل(ص > -١,٥)

= ل(-١,٥ < ص < ٠) + ٠,٥

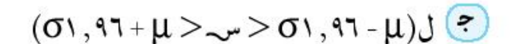
= ل(٠ < ص < ١,٥) + ٠,٥ = ٠,٤٣٣٢ + ٠,٥ = ٠,٩٣٣٢

ب) ل(س < μ - ٠,٥σ) = ل(ص < $\frac{\mu - ٠,٥\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(ص < -٠,٥) = ل(ص > ٠,٥)

= ٠,٥ - ل(٠ < ص < ٠,٥) = ٠,٥ - ٠,١٩١٥ = ٠,٣٠٨٥

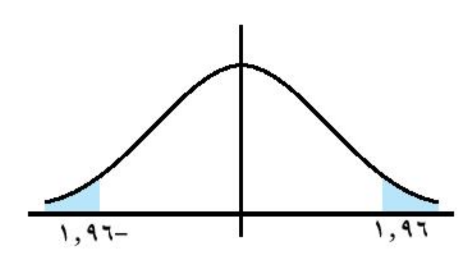
جـ) ل(μ - ١,٩٦σ < س < μ + ١,٩٦σ)



= ل($\frac{\mu - ١,٩٦\sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu - ١,٩٦\sigma - \mu}{\sigma}$)

= ل(-١,٩٦ < ص < ١,٩٦)

= ٢ ل(٠ < ص < ١,٩٦) = ٢ × ٠,٤٧٥٠ = ٠,٩٥



حاول أن تحل

٤) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. أوجد:

أ) ل(س < μ - ١,٢σ)

ب) (س > μ + ٠,٨σ)

جـ) ل(μ - ١,٤٨σ < س < μ + ١,٤٨σ)

مثال

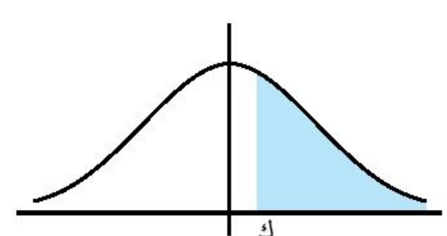
٥ إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ ل (ص ≥ ك) = ٠,١٠٥٦ ب ل (ص ≤ ك) = ٠,١١٥١

ج ل (-٠,٤٤ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨ د ل (ك ≤ ص ≤ ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

الحل

أ نلاحظ أن : المساحة > ٠,٥ ، علامة المتباينة "أكبر من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل المقابل .

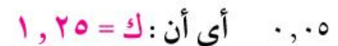


∵ ل (ص ≥ ك) = ٠,١٠٥٦

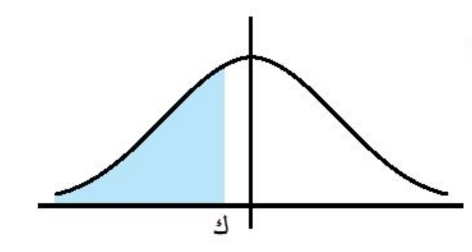
∴ ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,١٠٥٦

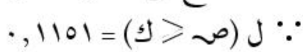
∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥ - ٠,١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

نبحث فى جداول المساحات عن العدد (ى) أو أقرب عدد إليه يناظر المساحة ٠,٣٩٤٤ فنجده ١,٢ تحت الفروق


٠,٠٥ أى أن : ك = ١,٢٥

ب نلاحظ أن : المساحة > ٠,٥ ، علامة المتباينة "أقل من" لذلك فإن ك تقع فى الفترة السالبة كما هو موضح بالشكل المقابل.




∵ ل (ص ≤ ك) = ٠,١١٥١

ومن التماثل فى المنحنى نجد أن : ل (ص ≥ ك) = ٠,١١٥١

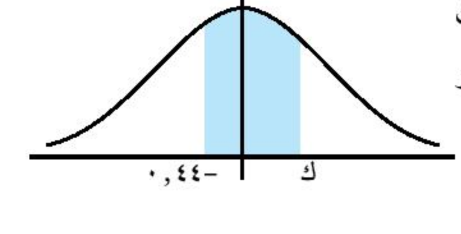
∴ ٠,٥ - ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,١١٥١

∴ ل(٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥ - ٠,١١٥١ = ٠,٣٨٤٩

∴ ك = - ١,٢ (لاحظ أن ك تقع فى الجزء السالب)


ج نلاحظ أن :

المساحة < ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة السالبة، لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة كما هو موضح بالشكل الجانبى .




∵ ل (-٠,٤٤ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (-٠,٤٤ ≤ ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٤) + ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ٠,١٧٠٠ + ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٥٥٨٨ - ٠,١٧٠٠ = ٠,٣٨٨٨ ∴ ك = ١,٢٢

د) نلاحظ أن:

المساحة < ٠,٥ وأحد طرفى الفترة يقع فى الفترة الموجبة،
لذلك يكون الطرف الآخر للفترة ى يقع فى الفترة الموجبة أيضًا
كما هوموضح بالشكل الجانبى .

∵ ل (ك < ص < ٢,١) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ < ص < ٢,١) - ل(٠ < ص < ك) = ٠,٢٩٠٦

∴ ل(٠ < ص < ك) = ل(٠ < ص < ٢,١) - ٠,٢٩٠٦

= ٠,٤٨٢١ - ٠,٢٩٠٦ = ٠,١٩١٥ ∴ **ك = ٠,٥**

حاول أن تحل

٥) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا فأوجد قيمة ك فى كل من الحالات الآتية :

أ) ل (ص ≤ ك) = ٠,١٩٨٠ ب) ل (ص < ك) = ٠,١٩٨٠

جـ) ل (-٢,٤ < ص < ك) = ٠,٧٩٧٠ د) ل (ك < ص < ٢,٥) = ٠,٨٢٣٨

مثال

٦) س متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ ، انحرافه المعيارى σ

أ) إذا كان: ل (س ≤ ١٨٠) = ٠,٠٠٦٢ ، μ = ١٦٥ فاحسب σ

ب) إذا كان: ل (س > ٣٥) = ٠,٨٦٤٣ ، σ = ٥ فاحسب μ

جـ) إذا كان: ل (س < ١٧٠) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٧ فاحسب μ

د) إذا كان: ل (س < ك) = ٠,٨٩٤٤ ، μ = ١٢٥ ، σ = ٨ فاحسب ك

هـ) إذا كان: ل (س > ك) = ٠,٩٤٥٢ ، μ = ٥٠ ، σ = ٥ فاحسب ك

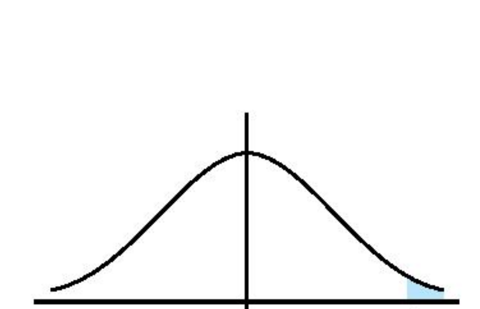
الحل

أ) ل(س ≥ ١٨٠) = ل (ص ≥ $\frac{١٨٠ - ١٦٥}{\sigma}$) = ٠,٠٠٦٢

∴ ل (ص ≥ ى) = ٠,٠٠٦٢ ، حيث ى = $\frac{١٥}{\sigma}$ ، ى > ٠

∴ ل(٠ < ص < ى) = ٠,٥ - ٠,٠٠٦٢ = ٠,٤٩٣٨

∴ ى = ٢,٥



∴ $\frac{١٥}{\sigma}$ = $\frac{٥}{٢}$ ∴ σ = $\frac{١٥ \times ٢}{٥}$ ∴ **σ = ٦**

ب) ل (س < ٣٥) = ل (ص < (٣٥ - μ)/٥) = ٠,٨٦٤٣

∴ ل (ص < ك) = ٠,٨٦٤٣ حيث

∴ ك = (٣٥ - μ)/٥ ، ك < ٠ ∴ ل (٠ ≤ ص ≤ -ك) + ٠,٥ = ٠,٨٦٤٣

ل (-ك < ص ≤ ٠) = ٠,٨٦٤٣ - ٠,٥ = ٠,٣٦٤٣ ∴ ك = -١,١

∴ (٣٥ - μ)/٥ = -١,١ ∴ ٣٥ - μ = -٥,٥

∴ μ = ٣٥ + ٥,٥ ∴ μ = ٤٠,٥

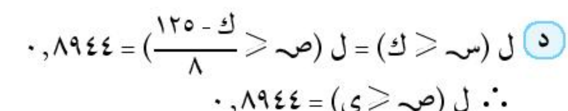
ج) ل (س ≤ ١٧٠) = ل (ص ≤ (١٧٠ - μ)/٧) = ٠,٠٢٢٨

∴ ل (ص ≤ ك) = ٠,٠٢٢٨ حيث ك = (١٧٠ - μ)/٧ ، ك < ٠

∴ ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٥ - ٠,٠٢٢٨ = ٠,٤٧٧٢

∴ ك = -٢

∴ (١٧٠ - μ)/٧ = -٢ ∴ ١٧٠ - μ = -١٤ ∴ μ = ١٧٠ + ١٤ μ = ١٨٤



د) ل (س ≤ ك) = ل (ص ≤ (ك - ١٢٥)/٨) = ٠,٨٩٤٤

∴ ل (ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤

حيث ى = (ك - ١٢٥)/٨ ، ى > ٠

∴ ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٨٩٤٤ - ٠,٥ = ٠,٣٩٤٤ ∴ ى = ١,٢٥

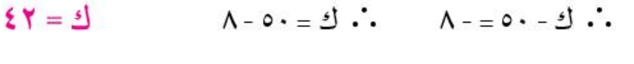
∴ (ك - ١٢٥)/٨ = ١,٢٥ ∴ ك - ١٢٥ = ١٠ ∴ ك = ١٢٥ + ١٠ ك = ١٣٥

هـ) ل (س > ك) = ل (ص > (ك - ٥٠)/٥) = ٠,٩٤٥٢

∴ ل (ص > ى) = ٠,٩٤٥٢

حيث ى = (ك - ٥٠)/٥ ، ى < ٠

∴ ل (٠ ≤ ص < -ى) = ٠,٩٤٥٢ - ٠,٥ = ٠,٤٤٥٢ ∴ ى = -١,٦



∴ (ك - ٥٠)/٥ = -١,٦ ∴ ك - ٥٠ = -٨ ∴ ك = ٥٠ - ٨ ك = ٤٢

حاول أن تحل

٦) إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان ل (س < ١٩) = ٠,٧٧٣٤ ، ل (س > ١٠) = ٠,٩٣٣٢ احسب قيمة كل من μ ، σ .

تمــارين (٥ - ١)



(١) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد :

(أ) ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٥) ، ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,٤٢)

(ب) ل (-٠,٠٤ ≤ ص ≤ ٠) ، ل (-١,٦٣ ≤ ص ≤ ٠)

(جـ) ل (-٠,٧ ≤ ص ≤ ٠,٧) ، ل (-١,٦٥ ≤ ص ≤ ١,٦٥)

(د) ل (-٢,٤٢ ≤ ص ≤ ١,٦٧) ، ل (-١,٧٣ ≤ ص ≤ ٠,٦٤)

(هـ) ل (٠,٧٤ ≤ ص ≤ ١,٠٢) ، ل (١,٤ ≤ ص ≤ ٢,٢)

(و) ل (-٢,١ ≤ ص ≤ -٠,٩٢) ، ل (-١,٥ ≤ ص ≤ -٠,٨٤)

(ز) ل (ص ≤ ١,٤٤) ، ل (ص ≤ ٢,٠٥)

(ح) ل (ص ≤ -١,١٤) ، ل (ص ≤ -٢,٣٢)

(ط) ل (ص ≤ ٠,٦٥) ، ل (ص ≤ ١,٤٢)

(ى) ل (ص ≤ -٠,٤٥) ، ل (ص ≤ -١,٦)

(٢) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة العدد الحقيقى (ك) الذى يحقق :

(أ) ل (٠ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٥٥٤

(ب) ل (ك ≤ ص ≤ ٠) = ٠,٤١٢٠

(جـ) ل (- ك ≤ ص ≤ ك) = ٠,٢٢٠٦

(د) ل (ص ≤ ك) = ٠,٩٧٥٤

(هـ) ل (ص ≤ ك) = ٠,١٩٧٧

(و) ل (ص ≥ ك) = ٠,٠٩٣٤

(ز) ل (ص ≥ ك) = ٠,٩٩٥٥

(ح) ل (ك ≤ ص ≤ ١,١١) = ٠,٦٦٦٠

(ط) ل (ك ≤ ص ≤ ٢,٢٢) = ٠,٢٤٤٦

(ى) ل (-١,٧ ≤ ص ≤ ك) = ٠,٣٢٦١

(٣) ص متغير عشوائى طبيعى معيارى ، فإذا كان :

(أ) ل (ص ≤ ك) = ٠,١٧٣٦ أوجد: ل (ك ≤ ص ≤ ١,٧)

(ب) ل (صـ ≤ ك) = ٠,٠٢٠٧ — أوجد: ل (٠,٥٦ ≥ صـ ≥ ك)

(ج) ل (صـ ≥ ك) = ٠,٨٩٤٤ — أوجد: ل (-٠,٧ ≥ صـ ≥ ك)

(د) ل (٠,٤ ≥ صـ ≥ ك) = ٠,٣١١٠ — أوجد: ل (صـ ≥ ك)

(هـ) ل (١,٤ ≥ صـ ≥ ك) = ٠,٠٧٧٠ — أوجد: ل (-١,٤ ≥ صـ ≥ ك)

(و) ل (ك ≥ صـ ≥ ١,٧) = ٠,٨٥٨٦ — أوجد: ل (ك ≥ صـ ≥ ٠,٧٥)

(٤) سـ متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ وكان

(أ) ل (سـ ≥ ٩٠) = ٠,٠٦٦٨ ، μ = ١٠٢ فاحسب σ

(ب) ل (سـ ≤ ٦٢) = ٠,٠٥٤٨ ، μ = ٥٠ فاحسب σ

(ج) ل (سـ ≤ ٤٨) = ٠,٠٢٢٨ ، σ = ٤ فاحسب μ

(د) ل (سـ < ٦٨) = ٠,١٠٥٦ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

(هـ) ل (سـ ≤ ٤٢) = ٠,٨٩٤٤ ، σ = ٦,٤ فاحسب μ

(و) ل (μ - ك σ ≥ سـ ≥ μ + ك σ) = ٠,٤٣٨ فاحسب ك

(ز) ل (سـ ≥ ك) = ٠,٢١١٩ ، μ = ٤٢ ، σ = ٥ فاحسب ك

(ح) ل (سـ ≥ ك) = ٠,٨٤١٣ ، μ = ٧٢ ، σ = ٨ فاحسب ك

(ط) ل (سـ < ك) = ٠,٩٧٧٢ ، μ = ٦٠ ، σ = ٤ فاحسب ك

(٥) أجب عن الأسئلة الآتية

(أ) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ١٢٠ وانحرافه المعيارى ١٠ وكان ل(سـ < ك) = ٠,٩٥٩٩ فأوجد قيمة ك .

(ب) إذا كان سـ متغيرًا طبيعيًا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد قيمة μ التى تجعل ل (سـ ≥ ٣٥) = ٠,٠٢٢٨ ل (سـ ≥ μ) ، ل (سـ = μ)

(ج) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ٨ وانحرافه المعيارى σ = ٢ ، وكان ل (سـ ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ فأوجد :

أولًا : قيمة ك . **ثانيًا** : ل (سـ ≥ ١٠)

(د) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ و انحرافه المعيارى σ فأوجد ل (μ - $\frac{١}{٤}$ σ ≥ سـ ≥ μ + $\frac{١}{٢}$ σ)

(هـ) إذا كان صـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا فأوجد قيمة ك التى تحقق :

أولاً : ل (صـ > ك) = ٠,٠٢٨١

ثانياً : ل(- ١< صـ < ك) = ٠,٧٩١٨

(و) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ١٨ و انحرافه المعيارى ٢,٥ فأوجد :

اولاً: ل(سـ < ١٥)

ثانياً: ل (١٧< سـ < ٢١)

(ز) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ٢٤ وانحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد :

أولًا : ل (سـ ≤ ٣٢,٥)

ثانيًا : ل (١٤ < سـ < ٢٩)

(ح) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ٤٨ انحرافه المعيارى σ = ٥ فأوجد:

أولاً : ل (٤٣ < سـ < ٥٩)

ثانيًا : قيمة ك إذا كان ل (سـ < ك) = ٠,١٨٤١ .

(ط) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٧ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولًا : ل (١٦ ≤ سـ ≤ ٢٠)

ثانيًا : ل (سـ > ١٥)

(ى) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ٣٢ ، وتباينه ١٦ ، فأوجد :

أولًا : ل (سـ < ٢٥)

ثانيًا : ل (٢٨ < سـ < ٣٥)

(ك) إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطهμ = ٨ انحرافه المعيارى σ = ٢ فأوجد:

أولًا : ل (سـ >١٠)

ثانيًا : إذا كان ل (سـ ≤ ك) = ٠,١٠٥٦ ، فأوجد قيمة ك .

بعض التطبيقات العملية للتوزيع الطبيعى

Some Practical Applications of the Normal Distribution

سوف تتعلم

- تطبيقات عملية التوزيع الطبيعى

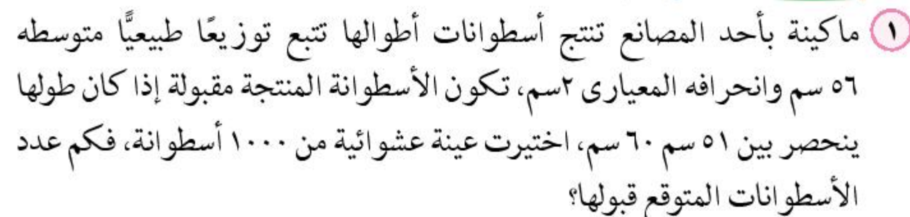
المصطلحات الأساسية

- التوزيع الطبيعى *Normal Distribution*
- المنحنى الطبيعى *Normal Curve*
- المتغير العشوائى الطبيعى *Normal Random Variable*
- التوزيع الطبيعى المعيارى *Standard normal distribution*

مقدمة:

فى الدرس السابق تعرفنا على التوزيع الطبيعى وخواصه ،كما تعرفنا على المتغير العشوائى الطبيعى المعيارى وكيفية إيجاده من التوزيع الطبيعى بمعلومية المتوسط والانحراف المعيارى ، كما تعرفنا على كيفية حساب احتمالات متغير عشوائى له توزيع طبيعى معيارى باستخدام الجداول الإحصائية. وفى هذا الدرس سوف نتناول بعض الاستخدامات المختلفة للمتغير العشوائى الطبيعى فى دراسة بعض الظواهر التى يعبر عنها .

مثال — **الربط بالصناعة**



(١) ماكينة بأحد المصانع تنتج أسطوانات أطوالها تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سم وانحرافه المعيارى ٢سم، تكون الأسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ سم ٦٠ سم، اختيرت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة، فكم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟



الحل

باعتبار أن سـ متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا يعبر عن طول الأسطوانة

∴ احتمال (الأسطوانة مقبولة) = ل (٥١ < سـ < ٦٠)

$= ل\left(\frac{٥١ - ٥٦}{٢} < ص < \frac{٦٠ - ٥٦}{٢}\right)$

= ل (-٢,٥ < ص < ٢)

= ل (-٢,٥ < ص ≤ ٠) + ل (٠ ≤ ص < ٢)

= ٠,٤٩٣٨ + ٠,٤٧٧٢ = ٠,٩٧١٠

٢,٥-   ٢

∴ عدد الأسطوانات المتوقع قبولها = ١٠٠٠ × ٠,٩٧١٠ = ٩٧١ أسطوانة

حاول أن تحل

(١) **الربط بالدخل:** إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل فى أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعى متوسط ١٧٥ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٠ جنيهات، فما هو عدد العاملين الذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهًا، ١٨٠ جنيهًا.

الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية

مثال



(٢) الربط بالتعليم: إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى متوسطه μ = ٤٤ وانحرافه المعيارى σ ، حيث حصل ٢٢,٦٦٪ من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة ، أوجد قيمة σ .

الحل

نفرض أن س متغير عشوائى طبيعى يعبر عن درجات الطلاب .

∴ ل (س > ٥٠) = $\frac{٢٢,٢٦}{١٠٠}$

∴ ل (ص > $\frac{٥٠ - ٤٤}{\sigma}$) = ٠,٢٢٦٦

∴ ل (ص > ك) = ٠,٢٢٦٦ حيث ك = $\frac{٦}{\sigma}$ ، ك > ٠

∴ ل (٠ ≤ ص < ك) = ٠,٥ - ٠,٢٢٦٦ = ٠,٢٧٣٤

∴ ك = ٠,٧٥ ∴ $\frac{٦}{\sigma}$ = ٠,٧٥ ∴ σ = $\frac{٦}{٠,٧٥}$ = ٨

ك

حاول أن تحل

(٢) إذا كانت درجات الطلاب فى أحد الامتحانات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ ، واختير طالب عشوائيًّا ، أوجد احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة بين ٦٦، ٧٥ درجة و إذا كان ١٥٪ من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز ، فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز.

مثال

(٣) الربط بالطول: إذا كان أطوال الطلاب فى إحدى المدارس الثانوية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ١٦٠ سم، وانحرافه المعيارى σ = ٥ سم فأوجد احتمال أن يختلف طول أى طالب عن μ بما لا يزيد عن ٨ سم .

الحل

نفرض أن س متغير عشوائى طبيعى يعبر عن أطوال الطلاب اختلاف الطول عن μ = | س - μ | " أى الفرق المطلق بين الطول والمتوسط μ"



تذكر أن

التعبير : |س - أ| < ب يكافئ:

التعبير : - ب < س - أ < ب

أى أن: أ - ب < س < أ + ب

∴ ل (| س - μ| < ٨) = ل(|س - ١٦٠| < ٨)

∴ ل(- ٨ < س - ١٦٠ < ٨)

= ل (١٥٢ < س < ١٦٨)

= ل ($\frac{١٥٢ - ١٦٠}{٥}$ < ص < $\frac{١٦٨ - ١٦٠}{٥}$)

= ل (-١,٦ < ص < ١,٦)

= ٢ × ل (٠ ≤ ص < ١,٦)

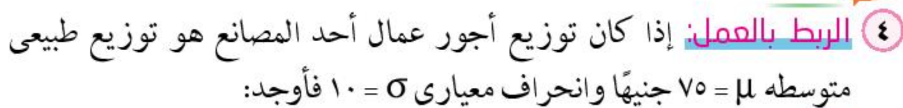
= ٢ × ٠,٤٤٥٢ = ٠,٨٩٠٤

١,٦ ١,٦

حاول أن تحل

٣) الربط بالوزن: إذا كان توزيع أوزان التلاميذ فى إحدى المدارس الابتدائية يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٣٠ كجم وانحراف معيارى ٥ كجم، احسب النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يزيد أوزانهم عن ٤٥ كجم، وكذلك النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقع أوزانهم بين ٢٥، ٣٥ كجم.

مثال



٤) الربط بالعمل: إذا كان توزيع أجور عمال أحد المصانع هو توزيع طبيعى متوسطه μ = ٧٥ جنيهًا وانحراف معيارى σ = ١٠ فأوجد:

أ) النسبة المئوية لعدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا.

ب) النسبة المئوية لعدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا.

ج) النسبة المئوية لعدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا.



الحل

أ) ∵ ل (س > ٩٠) = ل (ص > $\frac{٩٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥) = ٠,٥ - ٠,٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

∴ نسبة عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن ٩٠ جنيهًا = ٦,٦٨ ٪

ب) ∵ ل (س < ٥٥) = ل (ص < $\frac{٥٥ - ٧٥}{١٠}$) = ل (ص < - ٢)

= ٠,٥ - ل (٠ ≤ ص ≤ ٢) = ٠,٥ - ٠,٤٧٧٢ = ٠,٠٢٢٨

∴ نسبة عدد العمال الذين تقل أجورهم عن ٥٥ جنيهًا = ٢,٢٨ ٪ من العدد الكلى

ج) ∵ ل (٦٠ ≤ ص ≤ ٨٠) = ل ($\frac{٦٠ - ٧٥}{١٠}$ ≤ ص ≤ $\frac{٨٠ - ٧٥}{١٠}$)

= ل (- ١,٥ ≤ ص ≤ ٠,٥) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,٥) +

ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٥) = ٠,١٩١٥ + ٠,٤٣٣٢ = ٠,٦٢٤٧

∴ نسبة عدد العمال الذين تتراوح أجورهم بين ٦٠ ، ٨٠ جنيهًا = ٦٢,٤٧ ٪ من العدد الكلى لعمال المصنع .

حاول أن تحل

٤) بفرض أن درجات أحد الامتحانات هى متغير طبيعى بتوقع ٧٦ وانحراف معيارى ١٥ درجة وبترتيب الطلاب الأوائل الحاصلين على درجة أعلى من الدرجة α فكانوا يمثلون ١٥ ٪ من إجمالى الطلاب ، وبترتيب الطلاب الحاصلين على أقل الدرجات أدنى من الدرجة β وجد أنهم يمثلون ١٠ ٪ من إجمالى الطلاب أوجد :

أ) أقل درجة α كى يعتبر الطالب من الأوائل .

ب) درجة الرسوب β .

تمــارين ٥ - ٢



(١) إذا كان الدخل الشهرى لعدد ١٠٠٠ أسرة فى إحدى المدن هو متغير عشوائى طبيعى متوسطه ١٧٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ٢٠ جنيهًا اختيرت أسرة عشوائيًا ،أوجد:

(أ) احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ جنيهًا، ٢٠٠ جنيهًا .

(ب) عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهًا .

(٢) إذا كان أوزان الطلاب فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرامًا وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرامًا .

(أ)

احسب النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرامًا ، ٧١ كيلو جرامًا .

(ب) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلو جرامًا .



(٣) أخذت عينة عشوائية من ٢٠٠ تلميذ من مدرسة . فإذا كانت أعمارهم متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه ١٦,٦ وانحرافه المعيارى ١,٢ ، أوجد عدد التلاميذ الذين تقل أعمارهم عن ١٦ سنة من تلك العينة .

(٤) إذا كانت أطوال ٢٠٠٠ طالب بإحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ١٧٠ سم وانحراف معيارى ٨ سم فأوجد عدد الطلاب الذين تقل أطوالهم عن ١٧٦ سم .

(٥) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٣٠٠ أسرة يمثل متغيرًا عشوائيًّا سـ يتبع التوزيع الطبيعى بتوقع μ = ٥٠٠ جنيه وانحراف معيارى σ = ٢٠ جنيهًا فأوجد

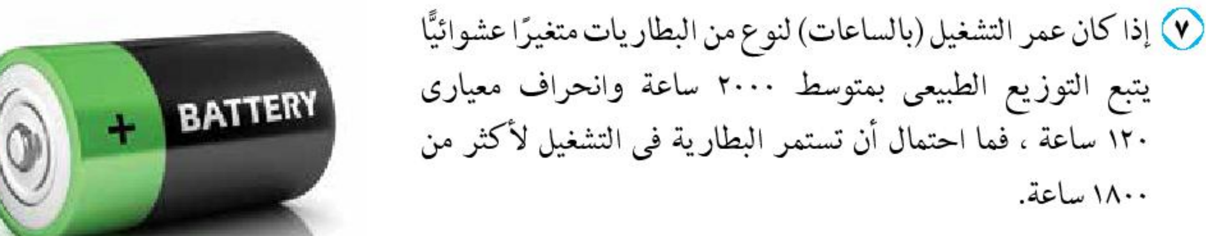
(أ) عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى أكبر من ٥٣٠ جنيهًا .

(ب) الحد الأعلى للدخل لنسبة الـ ٤ ٪ من الأسر التى تحصل على أدنى الدخول .

(٦) إذا كان الدخل الشهرى لـ ٢٠٠ أسرة متغيرًا عشوائيًّا سـ يتبع توزيعًا طبيعيًّا بتوقع μ = ٤٠٠ وانحراف معيارى σ = ٨٠ جنيهًا . واختيرت أسرة عشوائيًّا من هذه الأسر ، فأوجد :

(أ) احتمال أن يكون الدخل الشهرى للأسرة أكبر من ٥٠٠ جنيه على الأكثر

(ب) عدد الأسر التى تحصل على دخل شهرى ٥٠٠ جنيه على الأكثر .



(٧) إذا كان عمر التشغيل (بالساعات) لنوع من البطاريات متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ٢٠٠٠ ساعة وانحراف معيارى ١٢٠ ساعة ، فما احتمال أن تستمر البطارية فى التشغيل لأكثر من ١٨٠٠ ساعة.



(٨) إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ١٨٠ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٥ جنيهًا فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ١٩٨ جنيهًا.

(٩) إذا كان ارتفاع مياه الأمطار خلال شهر فبراير يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٣ سم ، وتباينه σ^2 = ٤ سم^2 ، فأوجد احتمال أن يكون ارتفاع الأمطار فى شهر فبراير فى العام التالى :

(أ) أكبر من ١ سم (ب) بين ٣,٥ سم ، ٤ سم

(١٠) إذا كانت درجات الحرارة فى شهر أغسطس تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ = ٣٥ درجة ، وانحرافه المعيارى σ = ٥ درجات ، فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر:

(أ) واقعة بين ٢٨ درجة ، ٣٨ درجة. (ب) أكبر من ٣٩ درجة .

(جـ) واقعة بين ٢٦ درجة ، ٣٢ درجة.

(١١) تقدم ١٠٠٠ شاب إلى إدارة التجنيد، فإذا كانت أطوالهم تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٧٠ سم، وانحراف معيارى ١٠ سم، أوجد عدد الشباب :

(أ) الذين تقل أطوالهم عن ١٩٠ سم

(ب) غير المقبولين إذا كان الحد الأدنى للطول المطلوب هو ١٥٥ سم

(١٢) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط ٥٠ سم، وانحراف معيارى σ ، إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم، فأوجد التباين لأطوال هذا النبات

(١٣) إذا كانت أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٥ كيلوجراما، وانحرافه المعيارى σ، وكانت أوزان ٣٣٪ من الطلبة تزيد عن ٧٠ كيلو جرامًا.

(أ) أوجد قيمة σ

(ب) إذا كان عدد الطلبة ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلبة الذين تقل أوزانهم عن ٦٧,٥ كيلوجرام

(١٤) إذا كان أوزان الطلبة فى إحدى الكليات تتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٦٨,٥ كيلو جرام وانحرافه المعيارى ٢,٥ كيلو جرام :

(أ) احسب النسبة المئوية للطلاب تقع أوزانهم بين ٦٧,٥ كيلو جرام ، ٧١ كيلو جرام .

(ب) إذا كان عدد الطلاب ١٠٠٠ طالب فاحسب عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٧١ كيلوجرامًا.

(١٥) إذا كان درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى بمتوسط μ = ٤٢ وانحرافه المعيارى σ حيث حصل ٢٦,١١ ٪ من الطلاب على أكثر ٥٠ درجة فأوجد قيمةσ .

(١٦) فى امتحان مادة الرياضيات كانت درجات الطلبة موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط قدره ٧٠ وانحراف معيارى ٥ ، أوجد عدد الطلبة الذين تزيد درجاتهم عن ٧٨ إذا علم أن عدد الطلبة المتقدمين للامتحان ١٠٠ طالب.

(١٧) ينتج أحد المصانع أسطوانات أطوالها يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه ٥٦ سنتيمترًا وانحرافه المعيارى ٢سنتيمترا، وتكون الأسطوانات المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ ، ٦٠ سنتيمترا ،أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة . كم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها؟

(١٨) إذا كانت أنصاف أقطار الحلزونات التى تنتجها أحد المصانع موزعة توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط ٢٥ سم ، وانحراف معيارى ٢٠ سم ، يعتبر الحلزون معيبًا إذا كان نصف قطره يقل عن ٢٠ سم أو يكبر عن ٢٨ سم اختير حلزون عشوائيًّا . أوجد احتمال أن يكون الحلزون معيبًا .

(١٩) إذا كانت أوزان مجموعة من حيوانات التجارب تتبع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط μ جرام وانحراف معيارى ١٠ جرامات فإذا علمت أن : ل (س $\leqslant$ ١٨٠) = ٠,١٥٨٧ احسب المتوسط μ .

(٢٠) إذا كانت درجات الطلاب فى امتحان ما متغيرًا عشوائيًّا يتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه μ وانحرافه المعيارى σ فأوجد :

(أ) احتمال الذين يحصلون على درجة أكبر من (μ - σ) .

(ب) النسبة المئوية للطلاب الذين يحصلون على درجة محصورة بين : (μ - ٢σ) ، (μ + ٢σ) .

(٢١) وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى ٤. إذا علم أن أطوال ١٠,٥٦ ٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم ، فأوجد المتوسط μ لهذا النبات.

(٢٢) إذا كانت درجات الحرارة فى شهر يناير تتبع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابى ١٦ درجة وانحرافه المعيارى ٤ درجات فأوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة فى يوم ما خلال هذا الشهر :

(أ) واقعة بين ١٤ درجة ، ٢٠ درجة

(ب) أكبر من ١٥ درجة .

(٢٣) فى أحد المجتمعات وجد أن نسب الذكاء تتوزع توزيعًا طبيعيًّا وسطه الحسابى ١٠٤,٦ وانحرافه المعيارى ٦,٢٥

(أ) أوجد نسبة الأفراد الذين تقع نسب ذكائهم بين ٩٠، ١٢٠

(ب) أوجد نسبة الأفراد الذين تزيد نسب ذكائهم عن ١١٠ .

الوحدة الخامسة

٥ - ٣

التقدير الإحصائى و فترات الثقة

Estimation and confidence intervals.

سوف تتعلم

- تقدير المتوسط لمجتمع بنقطة.
- تقدير المتوسط لمجتمع بفترة ثقة.

المصطلحات الأساسية

- المَعْلمة(بارامتر) *Parameter*
- الإحصاء *Statistics*
- التقدير *Estimate*
- التقدير بنقطة *Point Estimate*
- فترة الثقة *Confidence Interval*
- التوزيع الطبيعي *Normal Distribution*
- القيمة الحرجة *Critical Value*
- خطأ في التقدير *Estimation Error*
- التقدير بفترة *Interval Estimation*

مقدمة:

المَعْلمة *Parameter*

قيمة عددية ثابتة تميز المجتمع وغالبا تكون غير معلومة. **مثل** المتوسط μ ويقدر بمتوسط العينة $\overline{س}$

التقدير *estimation*

هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة و تعكس قيمة قريبة لمَعْلمة المجتمع ككل و توزيعه ، وله أسلوبين هما :

(١) التقدير بنقطة: *Point estimate*

هى قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير مَعْلمة مجهولة من معالم المجتمع.
مثل الوسط الحسابى لعينة عشوائية $\overline{س}$ ، و يستخدم لتقدير متوسط للمجتمع μ

(٢) التقدير بفترة ثقة: *Interval estimation*

هو إيجاد فترة معينة يُتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين و هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

فترة الثقة: هي فترة تُستخدم في الإحصاء لتقدير قيمة معلمة غير معروفة للمجتمع.

تفسير فترة الثقة: فترة الثقة بمستوى ٩٥٪ تعنى أنه عند تكرار تجربة بنفس الحجم عدد ١٠٠ مرة فإننا نثق بأن ٩٥ فترة من الفترات المئه يقع تقدير المَعْلمة بداخلها.

مستوى الثقة *level of confidence*

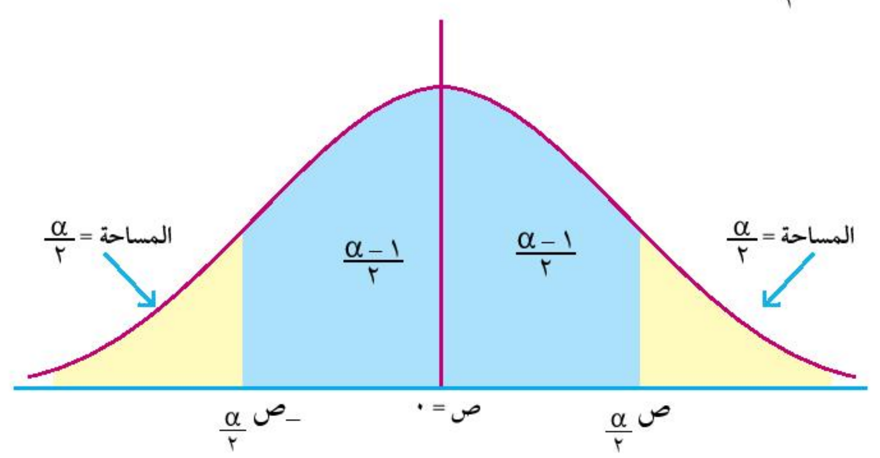
هو احتمال أن تكون فترة الثقة تحوى القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة وقيمة مستوى الثقة تساوى $(١ - \alpha)$ حيث α هى نسبة الخطأ فى التقدير .

فمثلاً:

- إذا كانت α =٠,٠٥ فإن مستوى الثقة = $(١ - \alpha)$= ٠,٩٥ = ٩٥٪
- إذا كانت α =٠,٠١ فإن مستوى الثقة = $(١ - \alpha)$ = ٠,٩٩ = ٩٩٪

القيمة الحرجة: ص $\frac{\alpha}{٢}$ *critical value*

لإيجاد القيمة الحرجة ص $\frac{\alpha}{٢}$ نحسب المساحة $\frac{١-\alpha}{٢}$ ومن جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعياري نحصل على القيمة ص $\frac{\alpha}{٢}$



مثال

(١) أوجد القيمة الحرجة ص $\frac{\alpha}{٢}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٥٪ بإستخدام التوزيع الطبيعى المعيارى

الحل

∵ مستوى الثقة ٩٥٪

∴ $١ - \alpha = ٠,٩٥$

∴ $\frac{١-\alpha}{٢} = \frac{٠,٩٥}{٢} = ٠,٤٧٥$ أى أن

ل (٠ < ص < ص $\frac{\alpha}{٢}$) = ٠,٤٧٥

بالكشف عن هذة القيمة فى جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧

∴ ص $\frac{\alpha}{٢}$ = ١,٩٦

حاول أن تحل

(١) أوجد القيمة الحرجة ص $\frac{\alpha}{٢}$ المناظرة لمستوى ثقة ٩٩٪ بإستخدام جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

الخطأ في التقدير *Estimation error*

عند استخدام عينة لتقدير المتوسط في المجتمع يكون الخطأ في التقدير والذي يرمز له بالرمز هـ

عند درجة ثقة ١ – α . يتعين من العلاقة التالية : $هـ = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times ص_{\frac{\alpha}{٢}}$

حيث σ الانحراف المعياري للمجتمع ، حجم العينه ن

التقدير بفترة الثقة لمتوسط المجتمع μ *Confidence interval for mean population*

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها ن من مجتمع يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وتباين $\sigma^٢$

فإن $\mu \in] \overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ [$

حيث $هـ = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ عند مستوى ثقة ١ – α

، $\overline{س}$ هو الوسط الحسابى للعينة ، هـ هو الخطأ في التقدير

كما يسمى الطرفين $\overline{س}$ - هـ ، $\overline{س}$ + هـ بالحدين الأدنى والأعلى لفترة الثقة

ملاحظة

(١) عند إيجاد فترة الثقة سنكتفى مستوى الثقة ٩٥٪ و التى تناظرها القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦ (من جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى)

(٢) فى حالة اذا كانت حجم العينة أكبر من ٣٠ ، σ غير معلومة فإنه يمكن اعتبار أن الانحراف المعيارى للمجتمع σ هو الانحراف المعيارى للعينة .

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط فى المجتمع μ

(١) نوجد القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ المناظرة لدرجة ثقة ٩٥٪ و هى ١,٩٦

(٢) نوجد الخطأ في التقدير $هـ = \frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ حيث σ هى الانحراف المعيارى للمجتمع ، ن حجم العينة.

(٣) نوجد فترة الثقة $] \overline{س} - هـ ، \overline{س} + هـ [$

مثال

٢ أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض فإذا كان حجم العينة ٤٩ و الانحراف المعيارى لمجتمع الإناث σ = ١٢,٥ و المتوسط الحسابى للعينة $\overline{س}$ = ٧٦,٥ بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪



أ) أوجد الخطأ في التقدير

ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابى للمجتمع الاحصائى μ

ج) فسر فترة الثقة

الحل

∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ∴ القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ =١,٩٦

(أ) حيث أن $\overline{س}$ = ٧٦,٥ ، σ = ١٢,٥ ، ن = ٤٩ ، $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦

فإن الخطأ في التقدير هـ = $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times ص_{\frac{\alpha}{٢}} = \frac{١٢,٥}{\sqrt{٤٩}} \times ١,٩٦ = ٣,٥$

(ب) فترة الثقة هى] $\overline{س}$ - هـ ، $\overline{س}$ + هـ[=]٧٦,٥ - ٣,٥ ، ٧٦,٥ + ٣,٥[=]٧٣،٨٠[

(ج) التفسير: عند اختيار ١٠٠ عينة عشوائية ذات نفس الحجم (ن=٤٩) و حساب فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن ٩٥ فترة من هذه الفترات تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط المجتمع μ

حاول أن تحل

(٢) أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض فإذا كان حجم العينة ٦٤و الانحراف المعيارى لمجتمع الإناث σ = ٣,٦ و المتوسط الحسابى للعينة $\overline{س}$ = ١٨,٤ بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

(أ) أوجد الخطأ في التقدير

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابى للمجتمع الاحصائى μ

(ج) فسر فترة الثقة

مثال

(٣) عينة حجمها ٤٩ فإذا كان الوسط الحسابى للعينة ٦٠ و تباينها ١٤٤بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪

(أ) أوجد الخطأ في التقدير

(ب) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابى للمجتمع الاحصائى μ

(ج) فسر فترة الثقة

الحل

∵ مستوى الثقة ٩٥٪ ∴ القيمة الحرجة $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ =١,٩٦

(أ) حيث أن $\overline{س}$ = ٦٠ ، σ = ١٢ ، ن = ٤٩ ، $ص_{\frac{\alpha}{٢}}$ = ١,٩٦

فإن الخطأ في التقدير هـ = $\frac{\sigma}{\sqrt{ن}} \times ص_{\frac{\alpha}{٢}} = \frac{١٢}{\sqrt{٤٩}} \times ١,٩٦ = ٣,٣٦$

(ب) فترة الثقة هى] $\overline{س}$ - هـ ، $\overline{س}$ + هـ[=]٦٠ - ٣,٣٦ ، ٦٠ + ٣,٣٦[=]٥٦,٦٤ ، ٦٣,٣٦[

تمـــارين ٥ – ٣

أولاً: أختر الاجابة الصحيحة

(١) عينة حجمها ن فإذا كان الوسط الحسابى للعينة ١٣ و انحرافها المعيارى ١٢ بإستخدام درجة ثقة ٩٥٪ وكان الخطأ فى التقدير يساوى ٢,٣٥٢ فإن حجم العينة يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٦ (ج) ٥٠ (د) ١٠٠

(٢) عينة حجمها ٢٢٥ بإستخدام مستوى ثقة ٩٥٪ وكان الخطأ فى التقدير يساوى ٠,٧٨٤ فإن الانحراف المعيارى للعينة يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٣٦

(٣) إذا كان الحد الأعلى لفترة الثقة ٩٥٪ لمتوسط عينة يساوى ٧,٢٥ وكان الخطأ فى التقدير يساوي ١,٢٥ فإن متوسط العينة يساوى ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

(٤) إذا كانت فترة الثقة لمتوسط عينة هى]٩,٣ ، ١٠,٧[فإن الوسط الحسابى للعينة يساوى ....

(أ) ٨ (ب) ٩ (ج) ١٠ (د) ١١

(٥) إذا كانت فترة الثقة لمتوسط عينة هى]٩,٠٢ ، ١٠,٩٨[وكان الانحراف المعيارى للعينة يساوى ٤ بمستوى ثقة ٩٥٪ فإن حجم العينة يساوى ....

(أ) ٣٠ (ب) ٤٩ (ج) ٢٢٥ (د) ٦٤

(٦) إذا كان الحد الأدنى لفترة الثقة للمتوسط يساوى ٢٣,٠٤ بمستوى ثقة ٩٥٪ وكان حجم العينة ٦٢٥ والوسط الحسابى للعينة يساوى ٢٥ فإن الانحراف المعيارى لبيانات هذة العينة يساوى ..

(أ) ٢٥ (ب) ٢٦ (ج) ٢٧ (د) ٢٨

(٧) إذا كان الحد الأعلى لفترة الثقة لمتوسط عينةيساوى ٣١,٩٦ بمستوى ثقة ٩٥٪ وكان الوسط الحسابى للعينة يساوى ٣٠ و الانحراف المعيارى للعينة ٧ فإن حجم العينة يساوى ....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٦ (ج) ٤٩ (د) ٦٤

(٨) إذا كان متوسط مجمتع احصائى μ في عينة حجمها ٣٦ يحقق المتباينة:

$\frac{٥}{٦}$ × ١,٩٦ – ٣٦ > μ > ٣٦ + ١,٩٦ × $\frac{٥}{٦}$ عند مستوى ثقة ٩٥٪ فإن الانحراف المعيارى لهذة العينة يساوى ....

(أ) ١,٩٦ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٣٦

٩ إذا تم حساب ٩٥٪ فترة الثقة لمتوسط عينة من ١٠٠ شخص فكانت (٥٠ ± ٢) كيلوجرام، فإن حجم العينة المتوقع إذا أردنا تقليل نسبة الخطأ إلى ١ كيلوجرام مع الاحتفاظ بنفس مستوى الثقة يساوي ....

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٥٠ (ج) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

ثانياً: أجب عما يلى:

١ لديك عينة من ٥٠ طالباً في جامعة، وقد حصلوا على درجات في اختبار معين. متوسط الدرجات في العينة هو ٧٥ والانحراف المعياري هو ١٠. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط الدرجات في المجتمع

٢ تم أخذ عينة من ١٠٠ موظفًا، ووجد أن متوسط ساعات العمل الأسبوعية هو ٣٨ ساعة والانحراف المعياري هو ٤ ساعات. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط ساعات العمل الأسبوعية.

٣ تم أخذ عينة من ٤٩طالب، ووجد أن متوسط درجاتهم هو ٧٢ والانحراف المعياري هو ٦. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط درجات الطلاب.

٤ تم أخذ عينة من ١٠٠ زبون، ووجد أن متوسط قيمة الفاتورة هو ٢٥٠ جنيه والانحراف المعياري هو ٢٠ جنيه. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط قيمة الفاتورة.

٥ متوسط مدة النوم في عينة من ٤٠٠ شخص هو ٧,٢ ساعة والانحراف المعياري هو ١,١ ساعة. احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لعدد ساعات النوم.

٦ تم أخذ عينة من ١٥ شركة، ووجد أن متوسط الأرباح السنوية هو ٢٥٠٠٠٠ جنيهًا والإنحراف المعياري هو ٣٠٠٠ جنيهًا . احسب فترة الثقة بنسبة ٩٥٪ لمتوسط الأرباح السنوية.

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى المعيارى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٥٩
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	١٩٨٥.٠	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٥	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣١٩
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤١
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨